CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 8– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 8.1 (8.1)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. *Stabilire se* T *è lineare.*

Soluzione:
Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(2v) = 2T(v)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^3$. Sia per esempio $v = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} &T(v) = T(1,0,0) = (1,0,0) \ \Rightarrow \ 2T(v) = (2,0,0) \\ &T(2v) = T(2,0,0) = (4,0,0) \end{aligned}$$

Quindi $T(2v) \neq 2T(v)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 8.2 (8.3)**.** *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$T(1,2) + T(1,5) = T((1,2) + (1,5)) = T(1+1, 2+5) = T(2,7),$$

mentre

$$\begin{aligned} &T(1,2) + T(1,5) = (3,0) + (1,4) = (4,4) \\ &T(2,7) = (4,5) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 8.3 (8.5)**.** *Determinare una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Soluzione:
Possiamo procedere in due modi.

(1) Ricaviamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^2$ imponendo la linearità di T:

$$\begin{aligned} &2T(0,1) = T(0,2) = (4,4) \ \Rightarrow \ T(0,1) = (2,2) \\ &T(1,0) = T(1,1) - T(0,1) = (1,2) - (2,2) = (-1,0) \end{aligned}$$

Di conseguenza, preso il generico elemento $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in \mathbf{R}^2$, per la linearità di T deve essere

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(-1,0) + y(2,2) = (-x + 2y, 2y)$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1, 1) = (1, 2)$ e $T(0, 2) = (4, 4)$ come richiesto.

(2) Alternativamente possiamo scrivire il generico elemento $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di cui conosciamo l'immagine (che formano una base di $\mathbf{R}^2$): $(1, 1)$ e $(0, 2)$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,2) \ \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ a + 2b = y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{-x+y}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{-x+y}{2}(0,2)$$

Essendo T lineare deve quindi essere

$$\begin{aligned} T(x,y) =& x\,T(1,1) + \frac{-x+y}{2}T(0,2) = x(1,2) + \frac{-x+y}{2}(4,4) \\ =& (x,2x) + (-2x+2y,-2x+2y) = (-x+2y,2y) \end{aligned}$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

□

Esercizio 8.4 (8.8)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che* $T(v) = Av$ *con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di* T*.*
b) *Stabilire se* $(-3,2,1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$*.*

Soluzione:

a)

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ A\cdot v \mid v \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Sia quindi $v = (x,y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, l'immmagine di T è formata dai vettori

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{bmatrix} = (1,2,1)\cdot x + (1,0,-1)y$$

In sostanza $\mathrm{Im}(T)$ è lo spazio generato dalle colonne di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (1,2,1),\ (1,0,-1) \rangle$$

Riduciamo perciò A a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha rango 2 e le due colonne sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}$$

Analogamente il nucleo di T è

$$\mathrm{N}(T)) = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \mid A\cdot v = 0 \right\}$$

Sia quindi $v = (x,y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, il nucleo di T è formato dalle soluzioni di

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

In sostanza il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A. Usando la matrice ridotta è immediato vedere che l'unica soluzione è il vettore nullo $(0,0)$, quindi $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$.

b) Il vettore $w = (-3,2,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se appartiene allo spazio generato dalle colonne di A, ovvero se ammette soluzione il sistema $Ax = w$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

Il sistema non ammette soluzione, quindi $w = (-3,2,1)$ non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Notiamo che

- Nucleo di T: corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
- Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.
- w appartiene all'immagine di T se il sistema $A|w$ ha soluzione, cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 8.5 (8.7)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita sulla base canonica di* $\mathbf{R}^2$ *nel seguente modo:* $T(e_1) = (1,2,1),\ T(e_2) = (1,0,-1)$*.*

a) *Esplicitare* $T(x, y)$.
b) *Determinare la matrice* A *associata a* T *(rispetto alle basi canoniche).*
c) *Stabilire se* $(3, 4, 1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di T:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1, 2, 1) + y \cdot (1, 0, -1) = (x + y,\ 2x,\ x - y)$$

b) La matrice associata a A è la matrice che ha per colonne le immagini della base canonica di $\mathbf{R}^2$ (espresse rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$). Avendo già $T(e_1)$ e $T(e_2)$ è immediato ricavare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Il vettore $w = (3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tale che $T(x, y) = w$, ovvero se $(x + y, 2x, x - y) = (3, 4, 1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (3, 4, 1) = T(2, 1) \in \mathrm{Im}(T)$$

Utilizzando la matrice associata al sistema, w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

In generale w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 8.6 (8.6)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.
a) *Verificare che* T *è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di* T.
c) *Determinare la matrice* A *associata a* T *(rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare* $T(1, 2)$ *usando la definizione e usando la matrice* A.

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbf{R}^2$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ T(v_1) + T(v_2) &= (x_1 + y_1, 2x_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, 2x_2, x_2 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \\ \lambda T(v) &= \lambda(x + y, 2x, x - y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \end{aligned}$$

Anche la seconda proprietà è verificata, quindi T è lineare.

b) Per definizione

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \mid T(v) = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + y, 2x, x - y) = (0, 0, 0) \right\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T) &= \left\{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^2\right\} \subseteq \mathbf{R}^3 \\ &= \{(x+y, 2x, x-y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(1,2,1)x + (1,0,-1)y \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle (1,2,1),\ (1,0,-1)\rangle\end{aligned}$$

A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Quindi la matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}.$$

c) La matrice A ha per colonne le immagini dei vettori della base di $\mathbf{R}^2$ espressi come combianzione lineare degli elementi della base di $\mathbf{R}^3$. Nel caso in cui le basi siano quelle canoniche la cosa è immediata:

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,1), \qquad T(e_2) = T(0,1) = (1,0,-1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Notiamo che al punto b) abbiamo in sostanza trovato:

– Nucleo di T: corrisponde alle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
– Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.

---

d) Con la definizione di T:

$$T(1,2) = (1+2, 2\cdot 1, 1-2) = (3,2,-1)$$

Con la matrice A

$$T(1,2) = A \cdot (1,2)^T = (3,2,-1)$$

□

Esercizio 8.7 (8.17)**.**

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T *da* $\mathbf{R}^3$ *a* $\mathbf{R}^2$.

b) *Scrivere la matrice rappresentativa di* T *rispetto alla basi canoniche.*

c) *Trovare basi di* $Im(T)$ *e di* $N(T)$.

Soluzione:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di $\mathbf{R}^3$:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi e_i della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1, 2, 3$, dobbiamo esprimere ogni e_i come combinazione lineare dei vettori v_i. Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_3 = v_1 - v_3, \qquad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di T ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2) \\ T(e_3) &= T(v_1) - T(v_3) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (-1,2) - (2,1) = (-3,1) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0,1,1) - T(1,1,1) + T(1,1,0) \\ &= (0,4) - (-1,2) + (2,1) = (3,3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$\begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1) = (-1,-2),\ T(e_2) = (3,3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1\right) \right\}$$

□

Esercizio 8.8 (8.11)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ *la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$*.*
b) *Dire se* T *è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *il vettore* $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ *appartiene all'immagine di* T*?*

Soluzione:

Ricordiamo che $\mathrm{Im}(T)$ è generata da

$$T(e_1) = (1,1,0,0,-1), \qquad T(e_2) = (-1,1,1,1,-1)$$
$$T(e_3) = (0,0,0,3,0), \qquad T(e_4) = (0,0,0,0,0)$$

Quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(T)$ equivale al rango della matrice associata a tali vettori.

Inoltre v_k appartiene all'immagine di T se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4) \rangle$.

Per rispondere a tutte le tre domande riduciamo a gradini la matrice associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV - III \\ V + II \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 2III - II \\ \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3\\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}\\ &= \{(1,1,0,0,-2),\ (-1,1,1,1,0),\ (0,0,0,3,0)\}\end{aligned}$$

Inoltre dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T))$ notiamo che

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathrm{N}(T)$$
$$\text{sse}$$
$$T(v) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) + x_4T(e_4) = 0$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice ridotta precedentemente a gradini:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0\\ 2x_2 = 0\\ 3x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0\\ x_2 = 0\\ x_3 = 0\\ x_4 = t\end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (0,0,0,1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbf{R}^5) \ \Rightarrow \ T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ T \text{ non è iniettiva}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema impostato all'inizio è compatibile. Dalla terza riga della matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0\\ 2x_2 = 2\\ 3x_3 = 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1\\ x_2 = 1\\ x_3 = 1\\ x_4 = t\end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$v_0 = T(1,1,1,t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 8.9 (8.30)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *la funzione lineare definita da* $T(x) = Ax$*, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se* T *invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di* T*.*

Soluzione:

a) T invertibile se è biiettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice A ha rango 4. In sostanza T è invertibile se e solo se lo è A.

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{matrix} \\ 1/2II+I \\ III+1/2II \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \\ IV-III \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ha rango 3 quindi T non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\text{rg}(A) < 4$ in quanto A ha la quarta colonna multipla della terza.

Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di A (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduzione ci serviva comunque per il punto successivo.

b) Poichè le prime tre colonne di A contengono un pivot, ne segue che

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(1,-2,1,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,0,0,-1)\}$$

Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x - z + w = 0 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T)) = \{\ (0,0,1,1)\ \}$$

□

Esercizio 8.10 (8.16)**.** *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$

$$T(x,y,z,w) = (-x+z,\ 2y,\ x-2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\det(A) = 2 \neq 0$, quindi T è invertibile.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} -I \\ \\ III+I \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} I-III \\ 1/2II \\ -III \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\text{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4 - \text{rg}(A) = 0$, quindi T e iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biiettiva e quindi invertibile.
b) La matrice $M\left(T^{-1}\right)$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M\left(T^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(x,y,z,w) = \left(-2x - z,\ \frac{1}{2}y,\ -x-z,\ w\right)$$

$\square$

Esercizio 8.11 (8.34)**.** *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\ 3x-z,\ 2x-y+z)$$

e sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x,y,z) = (x+z,\ x-y+z,\ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Soluzione:

Calcoliamo le matrici associate a f e g (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$):

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le matrici associate a f e g possiamo calcolare direttamente la matrice associata alle due funzioni composte. Infatti la matrice associata a $g \circ f$ è $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ e la matrice associata a $f \circ g$ è $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$. Quindi

$$M(g \circ f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la dimensione dei nuclei basta calcolare il rango delle matrici. Riducendo a gradini:

$$M(g \circ f) \ \Rightarrow \ \begin{array}{r} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) \ \Rightarrow \ \begin{array}{r} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\dim\left(\mathrm{N}(g \circ f)\right) = 3 - \mathrm{rg}\left(M(g \circ f)\right) = 3 - 2 = 1$$
$$\dim\left(\mathrm{N}(f \circ g)\right) = 3 - \mathrm{rg}\left(M(f \circ g)\right) = 3 - 1 = 2$$

$\square$

Esercizio 8.12 (8.32)**.** *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni k

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

□

Esercizio 8.13 (8.15)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*

b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per risponedere alla domanda b) dobbiamo risolvere il sistema $A \cdot (x, y, z)^T = (3, 3, k)^T$; riduciamo quindi direttamente a gardini la matrice A affiancata dalla colonna $(3, 3, k)^T$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow II + I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III - II \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-6 \end{bmatrix}$$

a) Considerando la matrice A otteniamo che una base dell'immagine di T è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2, -2, 0),\ (0, 1, 1)\}$$

Risolvendo il sistema $Ax = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) \right\}$$

b) T non è iniettiva in quanto il nucleo di T ha dimensione 1.

Risolviamo il sistema $Ax = (3, 3, k)^T$. Il sistema ha soluzione solo se $k = 6$ quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3, 3, k)$ appartiene all'imangine di T solo se $k = 6$. In tale caso i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$ sono i vettori del tipo $v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) t,\ \forall t \in\ R$.

Notiamo che i vettori del tipo $\left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) t$ sono gli elementi del nucleo. Infatti se $v_0 = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right)$ e $w \in \mathrm{N}(T)$, poiché $T(v_0) = (3, 3, 6)$, allora $T(v_0 + w) = T(v_0) + T(w) = (3, 3, 6) + (0, 0, 0) = (3, 3, 6)$.

□

Esercizio 8.14 (8.9)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano π : $\quad x + 2y = 0$.

Soluzione:

Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \quad \pi = \{(x, y, z) = (-2t, t, s) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x, y, z) = (-2t, t, s)$ di π è quindi data da

$$T(x, y, z) = A \cdot (x, y, z) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t + s \end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t + s).$$

Infine l'immagine di π è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}, \\ z = 2t + s \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T(\pi) : \quad 5x + 7y = 0$$

$\square$