CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 7.1 (7.36)**.** *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^3$.
b) *Si determini la dimensione una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori:

$$A = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ k+3 & 3 & 3k \\ 0 & k+2 & k \end{bmatrix}$$

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$ se $\dim(V) = 3$, cioè se $\mathrm{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$. Calcoliamo quindi il determinante di A che è immediato sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\det(A) = (k+3)[3k - 3k(k+2)] = 3k(k+3)(-k-1)$$

Quindi se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti e $V = \mathbf{R}^3$.

b) Abbiamo già osservato che se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Inoltre:
   – Se $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -1$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e una possibile base è $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_2,\ v_3\}$.

□

Esercizio 7.2 (7.50)**.** *Siano* U *e* V *i sottospazi di* $\mathbf{R}^3$ *così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (2, -1, -2),\ (-3, 4, 3) \rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Soluzione:
U e V sono due sottospazi di $\mathbf{R}^3$. Per dimostrare che $U = V$, dobbiamo dimostrare che $\dim(U) = \dim(V)$ e che $U \subseteq V$ oppure che $V \subseteq U$.

Cominciamo ad esplicitare U:

$$x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow U = \{(-t,\ s,\ t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1, 0, 1),\ u_2 = (0, 1, 0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (2, -1, -2),\ v_2 = (-3, 4, 3)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\dim(U) = \dim(V) = 2$.

In questo caso è probabilmente più semplice verificare che $V \subseteq U$. Infatti abbiamo per U una doppia definizione:

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\} = \langle\ (-1, 0, 1),\ (0, 1, 0)\ \rangle$$

Utilzzando la prima definizione è immediato verificare che i due generatori v_1 e v_2 di V appartengono a U, infatti entrambi sono vettori di $\mathbf{R}^3$ che verificano la condizione $x + z = 0$. Otteniamo quindi:

$$v_1 \in U \quad \text{e} \quad v_2 \in U \ \Rightarrow\ V = \langle v_1,\ v_2\rangle \subseteq U.$$

Infine abbiamo dimostrato che V è un sottospazio di U della stessa dimensione di U, quindi U e V coincidono.

In alternativa per dimostrare che $U \subseteq V$ avremmo dovuto considerare la matrice formata da v_1, v_2, u_1, u_2 come colonne. Tale matrice ha rango 2, quindi u_1 e u_2 sono linearmente dipendenti da v_1 e v_2 e $U \subseteq V$.

$\square$

Esercizio 7.3 (7.64)**.**

a) *Sia*

$$V = \langle\ (1, 2, 1),\ (-1, 3, 0),\ (3, 1, 2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0\ \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango della matrice A associata ai tre vettori riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/5II \\ III - 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$$
$$\mathcal{B}(V) = \{\ (1, 2, 1),\ (-1, 3, 0)\ \}$$

b) Associamo al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che i conti sono già stati eseguiti al punto precedente. Quindi

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e

$$\dim(S) = 1$$
$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-2, 1, 1)\ \}$$

c) Notiamo che con la stessa matrice abbaimo risolto due esercizi differenti tra cui in genere è facile confondersi. La relazione tra i due esercizi, oltre alla medesima riduzione della matrice, è solo legata alle dimensioni:

$$\begin{aligned} &\dim(V) = \mathrm{rg}(A) \\ &\dim(S) = \text{numero delle incognite} - \mathrm{rg}(A) \\ &\dim(V) + \dim(S) = \text{numero delle incognite} \end{aligned}$$

□

Esercizio 7.4 (7.66)**.** *Dati i vettori linearmente indipendenti* $v_1 = (3, 0, 1)$ *e* $v_2 = (1, 4, -2)$ *completare l'insieme* $S = \{v_1, v_2\}$ *in modo da ottenere una base di* $\mathbf{R}^3$.

Soluzione:

Si può completare la base utilizzando uno dei vettori canonici. Si tratta quindi di affiancare a v_1 e v_2 i tre vettori canonici di $\mathbf{R}^3$, per verificare quale di questi forma assieme a v_1 e v_2 un insieme linearmente indipendente. Riduciamo quindi a gradini la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III - I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 4III + 7II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza qualsiasi dei vettori della base canonica forma con v_1 e v_2 una matrice di rango 3, ovvero un insieme linearmente indipendente. Possiamo prendere per esempio

$$\mathcal{B} = \{(3, 0, 1),\ (1, 4, 2),\ (1, 0, 0)\,\}$$

□

Esercizio 7.5 (7.67)**.** *Siano*

$$v_1 = (1, -1, -1, 1),\ v_2 = (k, 1, 1, -1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) *Si trovino i valori del parametro* k *per i quali* v_1 *e* v_2 *sono indipendenti.*
b) *Per* $k = 2$*, si estenda l'insieme* $\{v_1, v_2\}$ *a una base di* $\mathbf{R}^4$.

Soluzione:

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice costituita da v_1 e v_2 e dai quattro vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + I \\ III - II \\ IV + III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) I due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti quando la matrice ad essi associata ha rango 2. Di conseguenza v_1 e v_2 sono indipendenti se $k \neq -1$.
b) Ponendo $k = 2$ nella matrice ridotta otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una base di $\mathbf{R}^4$ deve essere formata da quattro vettori. Dalla matrice notiamo che se aggiungiamo alle prime due colonne, corrispondenti a v_1 e v_2, la quarta e quinta colonna (per esempio) otteniamo una matrice di rango quattro. Quindi i quattro vettori corrispondenti sono linearmente indipendenti e una base di $\mathbf{R}^4$ è data dall'insieme:

$$\{\ v_1,\ v_2,\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0)\ \}$$

□

Esercizio 7.6 (7.68)**.** *Si consideri l'insieme S costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1, 2, 2, 1), \qquad v_2 = (2, 1, 2, 1), \qquad v_3 = (0, 1, 2, 1)$$

a) *E' possibile estendere S a una base di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S.*

Soluzione:

Per rispondere ad entrambi i quesiti riduciamo a gradini la matrice ottenuta dalla matrice associata ai 3 vettori, affiancata dalla matrice associata ai vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - II \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3III + II \\ IV + III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ 2IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai vettori v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e S può essere esteso a una base di $\mathbf{R}^4$.
b) Dalla matrice completa vediamo che la prima, seconda, terza e sesta colonna sono linearmente indipendenti, quindi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$ contenente S è data da

$$\mathcal{B} = \{ \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ e_3 = (0, 0, 1, 0) \ \}$$

□

Esercizio 7.7 (7.70)**.** *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \ \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare una base di V.*

Soluzione:

Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $a_i \in \mathbf{R}$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. A $p(x)$ possiamo associare le sue componenti $(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$ formata dai polinomi $\{1, \ x, \ x^2, \ x^3\}$. Quindi a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$ possiamo associare il vettore $(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3) \in \mathbf{R}^4$.

Nel nostro caso la condizione $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:

$$W = \left\{(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3) \in \mathbf{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$

cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

a) L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.
b) Per trovare una base di V determiniamo una base di W per poi tornare ai polinomi.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi il generico elemento di W ha la forma

$$(-1, 1, 0, 0) \cdot r + (-1, 0, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 0, 1) \cdot t$$

e una base di W è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 1, 0, 0), \ (-1, 0, 1, 0), \ (-1, 0, 0, 1)\}$$

Associamo ora ai vettori determinati i corrispondenti polinomi:

$$\begin{aligned}(-1,1,0,0) &\Rightarrow p_1(x) = -1+x\\ (-1,0,1,0) &\Rightarrow p_2(x) = -1+x^2\\ (-1,0,0,1) &\Rightarrow p_3(x) = -1+x^3\end{aligned}$$

Infine l'insieme

$$\mathcal{B}(V) = \left\{p_1(x) = -1+x,\ p_2(x) = -1+x^2,\ p_3(x) = -1+x^3\right\}$$

è una base di V.

□

Esercizio 7.8 (7.71)**.** *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1+x, \qquad p_2(x) = 1+2x+x^2, \qquad p_3(x) = x-x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = x^2-x+2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0,a_1,a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned}p_1 &= (0,1,1)\\ p_2 &= (1,2,1)\\ p_3 &= (-1,1,0)\end{aligned}$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(1,-1,2)$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1\\ 1 & 2 & 1 & | & -1\\ 1 & 1 & 0 & | & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III\\ \\ I\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2\\ 1 & 2 & 1 & | & -1\\ 0 & 1 & -1 & | & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 1 & | & -3\\ 0 & 1 & -1 & | & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 1 & | & -3\\ 0 & 0 & -2 & | & 4\end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = 2\\ x_2+x_3 = -3\\ -2x_3 = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\\ x_2 = -1\\ x_3 = -2\end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3\cdot p_1(x) - 1\cdot p_2(x) - 2\cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 7.9 (7.72)**.** *Si considerino i polinomi* $p_1 = x^2+ax+b+c$, $p_2 = x^2+bx+a+c$, $p_3 = x^2+cx+a+b$.

a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri* a, b, c *i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}[x]$.
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio* $\langle p_1, p_2, p_3\rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ *al variare di* a, b, c.

Soluzione:

Associamo ad ogni polinomio il vattore che esprime le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}[x]$:

$$p_1 = (1,a,b+c), \qquad p_2 = (1,b,a+c), \qquad p_3 = (1,c,a+b)$$

Possiamo quindi svolgere l'esercizio lavorando sui tre vettori.

Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - aI \\ III-(b+c)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai tre vettori ha sempre rango minore di tre, quindi i tre vettori e i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Dal punto a) sappiamo che $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha sicuramente dimensione minore di tre. Inoltre
   - Se $a = b = c$, allora la matrice ha rango 1 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 1. Una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1\}$ (o da $\{p_2\}$ o da $\{p_3\}$).
   - Se $a \neq b$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalle prime due colonne ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_2\}$.
   - Se $a \neq c$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalla prima e terza colonna ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_3\}$.

$\square$

Esercizio 7.10 (7.74)**.** *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Soluzione:

Come negli esercizi precedenti associamo a $p(x)$ le sue componenti rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$, $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad p = (d, c, b, a)$$

Imponiamo le due condizioni al generico polinomio di grado al più 3:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \ \Rightarrow \ d = 0 \\ p(1) = 0 \ \Rightarrow \ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Quindi a W corrisponde il sottospazio V formato dagli elementi di $\mathbf{R}^4$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$V = \{(d, c, b, a) \in \mathbf{R}^4 \mid d = 0,\ a + b + c = 0\}$$

Scriviamo ora le soluzioni di tale sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a = -s - t \\ b = s \\ c = t \\ d = 0 \end{cases} \qquad \forall s, t, \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$V = \langle\ (0, 0, 1, -1),\ (0, 1, 0, -1) \rangle$$

Infine

$$W = \langle p_1(x) = x^2 - x^3,\ p_2(x) = x - x^3\ \rangle$$

$\square$

Esercizio 7.11 (7.75)**.** *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. In particolare ai polinomi $p_1,\ p_2,\ p_3$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 1, 0)$$
$$p_2 = (k, 0, -1)$$
$$p_3 = (1, 2, k)$$

Di conseguenza i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

Per rispondere a entrambe le domande dell'esercizio riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori a cui affianchiamo la matrice identica 3×3.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & | & -1 & 1 & -k \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la prima parte della matrice: se $k \neq \pm 1$ la matrice associata ai vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$ ha rango 3, quindi i tre vettor isono linearmente indipendenti. Analogamente i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.

b) Se $k = \pm 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e dalla matrice ridotta ricaviamo che p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti. Inoltre considerando tutta la matrice possiamo notare che la prima, la seconda e la quarta colonna (per esempio) sono linearmente indipendenti. Ricordiamo che la quarta colonna corrisponde al vettore $(1, 0, 0)$ ovvero al polinomio $q = x^2$. Quindi:
   - Se $k = 1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:
   $$\mathcal{B} = \{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = x^2 - 1, \quad q = x^2\}$$
   - Se $k = -1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:
   $$\mathcal{B} = \{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = -x^2 - 1, \quad q = x^2\}$$

□