CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 6.1 (6.3)**.** *Calcolare il rango della seguente matrice A, utilizzando il calcolo del determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbf{R}$$

Soluzione:
Per calcolare il rango di A utilizziamo la seguente proprietà.

Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di A con determinante non nullo.

Cominciamo quindi a calcolare il determinante di A per stabilire quando $\text{rg}(A) = 3$.
Sviluppiamo rispetto alla terza colonna:

$$\det(A) = -(4-k) \cdot [2k-3-(k+2)] = (k-4)(k-5)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se $k = 4$ o $k = 5$.
Di conseguenza:

- Se $k \neq 4,\ 5$, la matrice ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 4$ la matrice A diventa:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$
Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = -15 \cdot 6 \neq 0$$
quindi $\text{rg}(A) = 2$.
- Se $k = 5$ la matrice A diventa:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$
Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:
$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(C) = 7 \neq 0$$
quindi $\text{rg}(A) = 2$.

□

Esercizio 6.2 (6.5)**.** *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Poichè $\det(A_1) = -1 - 4 = -5$ la matrice A_1 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_2. Poichè $\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, la matrice A_2 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}0 = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_3. Poichè $\det(A_3) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, la matrice A_3 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}3 = 3 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}1 = -1 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_4) = 10 \neq 0$, la matrice A_4 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{13} = (-1)^{1+3}1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 20 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \\ a'_{23} = (-1)^{2+3} = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{32} = (-1)^{3+2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \\ a'_{33} = (-1)^{3+3} = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \end{cases} \Rightarrow A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_5) = -6 \neq 0$, la matrice A_5 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 3 & a'_{12} = 0 & a'_{13} = 0 \\ a'_{21} = 0 & a'_{22} = -6 & a'_{23} = 0 \\ a'_{31} = 0 & a'_{32} = 0 & a'_{33} = -2 \end{array}$$

Quindi

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_6) = 4 \neq 0$, la matrice A_6 è invertibile. Inoltre

$$a'_{11} = 7 \qquad a'_{12} = -3 \qquad a'_{13} = -2$$
$$a'_{21} = 7 \qquad a'_{22} = 1 \qquad a'_{23} = -2$$
$$a'_{31} = -5 \qquad a'_{32} = 1 \qquad a'_{33} = 2$$

Quindi

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.3 (6.6)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Soluzione:

a)

$$\det(A) = (1-4) + 2k = 2k - 3$$

La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

b) Calcoliamo l'inversa di A dopo avere posto $k = 1$, nel quale caso $\det(A) = 2 - 3 = -1$.

$$a'_{11} = -3 \qquad a'_{12} = -1 \qquad a'_{13} = 2$$
$$a'_{21} = 2 \qquad a'_{22} = 1 \qquad a'_{23} = -2$$
$$a'_{31} = -1 \qquad a'_{32} = -1 \qquad a'_{33} = 1$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare l'inversa di A potevamo calcolare $rref(A)$ dopo avere affiancato a A, con $k = 1$, la matrice identica:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I + III \\ II + III \\ -III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.4 (6.7)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Soluzione:

a) Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k-2)\cdot[k(2-k)-k] = (2k-2)(-k^2+k)$$

Quindi $\det(A)=0$ se

$$\begin{aligned} &2k-2=0 \;\Rightarrow\; k=1 \\ &-k^2+k=0 \;\Rightarrow\; k=0 \text{ o } k=1 \end{aligned}$$

Infine A è invertibile se $k\neq 0$ e $k\neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k=-1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} I-III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Abbiamo visto che se $k\neq 0,1$ la matrice ha determinante non nullo, quindi in questi casi $\mathrm{rg}(A)=3$. Inoltre:

– Se $k=0$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} III \\ 1/2II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2$$

– Se $k=1$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=1$$

□

Esercizio 6.5 (7.5)**.** *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y+z=1-k \\ y+(1-k)z=1 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

ammette un'unica soluzione.

Soluzione:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette una unica soluzione se $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|b)=3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & 1 \end{array}\right] \Rightarrow II-kI \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & 1-2k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III+(k-1)II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & -k \end{array}\right]$$

Il sistema ammette un'unica soluzione se il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa sono entrambi tre. Dalla matrice ridotta questo avviene per $k\neq 0,2$.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che per $k=2$ il sistema non ammette soluzione, mentre per $k=0$ ne ammette infinite.

In alternativa potevamo calcolare il rango della matrice ragionando sui determinanti:

$$\det(A) = 1-k-1-k(1-k) = k^2-2k$$

Quindi se $k \neq 0, 2$, la matrice A ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.

□

Esercizio 6.6 (7.13)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:

La matrice associata a al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$. Utilizzando il determinante, ricordiamo che il rango di una matrice corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero. Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = (1+k) \cdot \det \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = (1+k)k^3$$

Quindi il sistema ammette una unica soluzione quando $k \neq 0, -1$.

b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$ (senza la necessità di ridurre la matrice associata):

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 2 \\ x + 2w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 6.7 (7.19)**.** *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = -(k+4) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2 \cdot [2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k=0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix}1&4&0&8\\0&0&1&2\\0&0&4&0\\0&0&2&3\end{bmatrix} \Rightarrow N(A):\begin{cases}x+4y+8w=0\\z+2w=0\\4z=0\\2z+3w=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-4t\\y=t\\z=0\\w=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A)=\{(-4,1,0,0)t \mid \forall t\in\mathbf{R}\}.$$

Se $k=0$ quindi $\mathcal{B}(N(A))=\{(-4,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A))=1$.

Se $k=-4$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix}-31&0&0&4\\-8&0&1&-6\\0&0&0&0\\-4&0&-2&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\31II-8I\\\\2IV-II\end{matrix}\begin{bmatrix}-31&0&0&4\\0&0&31&-218\\0&0&0&0\\0&0&-5&4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\\\\\31IV+5II\end{matrix}\begin{bmatrix}-31&0&0&4\\0&0&31&-218\\0&0&0&0\\0&0&0&-966\end{bmatrix}$$

$$N(A):\begin{cases}-31x+4w=0\\31z-218w=0\\w=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\\w=0\end{cases} \Rightarrow N(A)=\{(0,1,0,0)t \mid \forall t\in\mathbf{R}\}.$$

Se $k=-4$ quindi $\mathcal{B}(N(A))=\{(0,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A))=1$.

$\square$

Esercizio 6.8 (7.24)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$.*

$$v_1\equiv(1,2,-2),\qquad v_2\equiv(1,1,-3),\qquad v_3\equiv(3,7,k-6)$$

Soluzione:

Sappiamo che tre vettori di $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata:

$$\begin{bmatrix}1&1&3\\2&1&7\\-2&-3&k-6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\II-2I\\III+II\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&1\\0&-2&k+1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\\\III-2II\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&1\\0&0&k-1\end{bmatrix}$$

Ragionando sui ranghi:

- Se $k\neq1$ la matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3 e $v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.
- Se $k=1$ la matrice ha 2 pivot, quindi ha rango 2 e $v_1,\ v_2$ e v_3 non formano una base di $\mathbf{R}^3$.

In alternativa potevamo calcolare il rango utilizzando il determinante:

$$\det(A)=(k-6+21)-(2k-12+14)+3(-6+2)=-k+1$$

$v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$ se la matrice associata ha rango 3, ovvero se ha determinante non nullo, cioè $k\neq1$.

$\square$

Esercizio 6.9 (7.41)**.** *Si consideri l'insieme*

$$S=\{\ (k+1,k+1,0,2k),\ (0,2k,0,0),\ (1,3k,0,1),\ (1,5k,1,k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Posto $k=-1$ si trovino le coordinate del vettore $v=(1,1,0,1)$ rispetto alla base trovata.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il determinante della matrice associata ai quattro vettori

$$\det\begin{bmatrix}k+1&0&1&1\\k+1&2k&3k&5k\\0&0&0&1\\2k&0&1&k\end{bmatrix}=2k\cdot\det\begin{bmatrix}k+1&1&1\\0&0&1\\2k&1&k\end{bmatrix}$$

$$=2k\cdot(-1)\cdot\det\begin{bmatrix}k+1&1\\2k&1\end{bmatrix}=-2k(-k+1)$$

Se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante diverso da zero, quindi rango 4 e i vettori formano una base di $\mathbf{R}^4$.

b) Riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = v$ dove v_1, v_2, v_3, v_4 sono i vettori della base dopo avere posto $k = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + z - w = 1 \\ -2y - 3z - 5w = 1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine le coordinate di v rispetto alla base trovata sono

$$v = (0, -2, 1, 0)_S$$

$\square$