CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 5– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 5.1 (7.54). *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

SOLUZIONE:
Notiamo che

$$v = a_1(2,1,1,1,0) + a_2(1,-1,-1,3,1) + a_3(0,-3,0,1,0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,1,1,1,0), \quad v_2 = (1,-1,-1,3,0), \quad v_3 = (0,-3,0,1,0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).
b) Si tratta di stabilire quali vettori tra $v_1,\ v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \\ IV - II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 3IV + 4II \\ 3V + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 5.2 (7.55). *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0,1,1,1,-2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a).

SOLUZIONE:
Notiamo che

$$w = a_1(2,2,1,0,1) + a_2(-1,0,0,1,-4) + a_3(-1,-1,0,0,1)$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,2,1,0,1), \qquad v_2 = (-1,0,0,1,-4), \qquad v_3 = (-1,-1,0,0,1)$$

W è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se i tre vettori, o eventualmente quali, sono linearmente indipendenti. Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, o di una parte di essi. Per rispondere a entrambe le domande dobbiamo quindi ridurre a gradini la matrice associata ai tre vettori v_1, v_2 e v_3, e al vettore v.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ 2III-II \\ \\ IV-III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \\ V+4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ V-III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) La matrice associata a v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di W è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.
b) Si tratta di esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1$$

Infine le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1)$.

□

Esercizio 5.3 (7.56)**.** *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{\ (0, -1, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\}$$

□

Esercizio 5.4 (7.57)**.** *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1,\ x - 2y + z = 0,\ -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} S &= \{\ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{\ (2s, s, 0) + (-t, 0, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{\ (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t \mid s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.5 (7.58)**.** *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*

b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

Soluzione:

a) S è uno spazio vettoriale se il sistema è omogeneo cioè se $k = 0$.

b) Risolviamo il sistema omogeneo, riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -r \\ x_2 = -r + 2t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \forall\ r, s, t\ \in\ \mathbf{R}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-r, -r + 2t, r, s, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-r, -r, r, 0, 0) + (0, 0, 0, s, 0) + (0, 2t, 0, 0, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-1, -1, 1, 0, 0) \cdot r\ +\ (0, 0, 0, 1, 0) \cdot s\ +\ (0, 2, 0, 0, 1) \cdot t \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.6 (7.86)**.**

a) *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a + b \\ a & -2a + b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

b) *Determinare una base di W.*

Soluzione:

a) Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.
   – SOMMA. Siano
$$A_1 = \begin{bmatrix} 3a_1 & -a_1+b_1 \\ a_1 & -2a_1+b_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3a_2 & -a_2+b_2 \\ a_2 & -2a_2+b_2 \end{bmatrix}$$
   due generici elementi di W. Allora
$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 3a_1+3a_2 & -a_1+b_1-a_2+b_2 \\ a_1+a_2 & -2a_1+b_1-2a_2+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(a_1+a_2) & -(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2) & -2(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \quad \text{con } \begin{cases} a = a_1+a_2 \\ b = b_1+b_2 \end{cases}$$
   Quindi $A_1 + A_2 \in W$.
   – PRODOTTO per scalari. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix}$$
   un generico elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora
$$\lambda A = \begin{bmatrix} 3(\lambda a) & -\lambda a + \lambda b \\ \lambda a & -2(\lambda a) + \lambda b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a' & -a'+b' \\ a' & -2a'+b' \end{bmatrix} \quad \text{con } \begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{cases}$$
   Quindi $\lambda A \in W$.

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:
$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a \\ a & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi l'insieme
$$\mathcal{B} = \left\{ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
è un insieme generatore di W. Dobbiamo ora verificare se A e B sono linearmente indipendenti, ovvero se l'equazione $xA + yB = 0$ ha la sola soluzione nulla $x = y = 0$:
$$xA + yB = \begin{bmatrix} 3x & -x+y \\ x & -2x+y \end{bmatrix}$$
Quindi la condizione $xA + yB = 0$ si traduce nel sistema
$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -x+y = 0 \\ x = 0 \\ -2x+y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$
Quindi A e B sono linearmente indipendenti e una base di W è data da
$$\mathcal{B} = \{A,\ B\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 5.7 (7.88). *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*
$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$
a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora
$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$
   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.

– **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} -8a-7c & -8b-7d \\ a & b \end{bmatrix}$$
$$MA = \begin{bmatrix} -8a+b & -7a \\ -8c+d & -7c \end{bmatrix}$$

Quindi

$$MA = AM \ \Rightarrow \begin{cases} -8a-7c = -8a+b \\ -8b-7d = -7a \\ a = -8b+d \\ b = -7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+7c = 0 \\ 7a-8b-7d = 0 \\ a+8b-d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-7I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-8II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -8t+s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{bmatrix} -8t+s & -7t \\ t & s \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \mid \forall s,t \in \mathbf{R} \right\}$$

Di conseguenza S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\square$

Esercizio 5.8 (7.89)**.** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$. Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione.

Soluzione:

Sia

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$. Cominciamo a calcolare gli elementi di S:

$$AM = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -2x+2z & -2y+2w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

$$MA = \begin{bmatrix} x-2y & -x+2y \\ z-2w & -z+2w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Chiamiamo B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

S è quindi formato dai multilpli di B. E' perciò immediato dimostare che si tratta di un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}$:

- SOMMA. Se A_1 e A_2 appartengono a S, allora $A_1 = t_1 \cdot B$ e $A_2 = t_2 \cdot B$ per opportuni $t_1, t_2 \in S$, quindi
$$A_1 + A_2 = t_1 \cdot B + t_2 \cdot B = (t_1 + t_2) \cdot B \ \in \ S$$
- PRODOTTO per scalari. Sia $A = t \cdot B$ un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora
$$\lambda A = \lambda \cdot t \cdot B = (\lambda \cdot t) \cdot B \ \in \ S$$

In particolare S è uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato dalla matrice B.

□

Esercizio 5.9 (5.6)**.** *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Soluzione:

La risoluzione dell'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio.

Sappiamo infatti che data l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$

- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente indipendenti** se l'equazione ammette solo la soluzione nulla: $x = y = z = 0$.
- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente dipendenti** se l'equazione ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$.

Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - y + 2z = 0 \\ 7x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z \\ 6y - 12z - y + 2z = 0 \\ -14y + 28z - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z \\ 5y - 10z = 0 \\ -15y + 30z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z \\ y = 2z \\ -30z + 30z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = t \end{cases}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$0v_1 + 2tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Dall'equazione precedente notiamo che

- v_1 non si può esprimere come combinazione lineare di v_2 e v_3.
- Ponendo per esempio $t = 1$, otteniamo $2v_2 + v_3 = 0$ ovvero
$$v_2 = -\frac{1}{2}v_3$$
- Analogamente al punto precedente otteniamo
$$v_3 = -2v_2$$

□

Esercizio 5.10 (5.9)**.**

a) *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbf{R}^5$ sono linearmente dipendenti:*
$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$
b) *Per i valori di k determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Soluzione:

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$
riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III + II \\ V - II \\ IV \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & k & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - kII \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 + k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ (k - 2)z = 0 \end{cases}$$
Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 2$ otteniamo la soluzione $x = y = z = 0$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 2$ il sistema diventa
$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
Quindi per $k = 2$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

b) Al punto precedente abbiamo trovato che se $k = 2$ allora
$$-2tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
In particolare ponendo per esempio $t = 1$ oteniamo
$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \qquad v_2 = 2v_1 - v_3 \qquad v_3 = 2v_1 - v_2$$

□

Esercizio 5.11 (7.24)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$.*
$$v_1 \equiv (1, 2, -2), \qquad v_2 \equiv (1, 1, -3), \qquad v_3 \equiv (3, 7, k - 6)$$

Soluzione:

Sappiamo che tre vettori di $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & k-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Ragionando sui ranghi:

- Se $k \neq 1$ la matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3 e $v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.
- Se $k = 1$ la matrice ha 2 pivot, quindi ha rango 2 e $v_1,\ v_2$ e v_3 non formano una base di $\mathbf{R}^3$.

□

Esercizio 5.12 (7.26)**.** *In $\mathbf{R}^3$ siano*

$$v_1 = (k, 2, 1), \quad v_2 = (-2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k i tre vettori costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori trovati al punto* a)*, si calcolino le coordinate del vettore $v = (-2, 1, 2)$ rispetto a tale base.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ k & -2 & 0 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-kI \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -k & -2-2k \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -k-2 & -2k-8 \end{array}\right]$$

a) La matrice dei coefficienti ha rango 3 se $k \neq -2$, quindi v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$ se $k \neq -2$.
b) Risolviamo, per $k \neq -2$, il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -3 \\ (k+2)z = 2k + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{k+2} \\ y = \frac{-k+2}{k+2} \\ z = \frac{2k+8}{k+2} \end{cases}$$

Infine v ha coordinate $\left(-\dfrac{4}{k+2}, \dfrac{-k+2}{k+2}, \dfrac{2k+8}{k+2}\right)$ rispetto a $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

□

Esercizio 5.13 (7.27)**.** *Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di V.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto* a)*.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 affiancata dal vettore v per rispondere a entrambe le domande.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III+2I \\ IV+I \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ 2III-II \\ IV-III \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) Il rango di A è 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 = v$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale equazione (basta ignorare la terza colonna relativa a v_3). quindi

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \ v = 2v_1 + 2v_2, \qquad v = (2,2)_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 5.14 (7.32)**.** *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (3, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-6, 2, -4, 0), \quad v_3 = (-3, k, k-3, 0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & | & -3 \\ -1 & 2 & | & k \\ 2 & -4 & | & k-3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - 2/3I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

– Se $k \neq 1$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
– Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.

Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k = 1$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi se $k = 1$, $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$.
– Se $k \neq 1$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$.

□

Esercizio 5.15 (7.38)**.** *Sia*

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k+3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k+6, -3)$ appartiene a V.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori v_1, v_2 e v_3, affiancata dalla colonna dei termini noti formata dal vettore v_4 (in modo da risolvere anche l'equazione

$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 1 & k+3 & 1 & | & 3 \\ 2 & 4 & 1 & | & k+6 \\ -1 & -2 & k^2-1 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (k^2-1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -k(k^2-1) \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice A.
   – Se $k \neq -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 3 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

   – Se $k = -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 2 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3\}.$$

b) v_4 appartiene a V se il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione, ovvero se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.
   Notiamo che $-k(k^2-1) = 0$ se $k = 0, \pm 1$. Quindi
   – Se $k \neq 0, \pm 1$, allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ e v_4 non appartiene a V.
   – Se $k = 0$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
   – Se $k = 1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
   – Se $k = -1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 non appartiene a V.

$\square$

Esercizio 5.16 (7.39). *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:*

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (0, k-1, k-1), \quad v_3 = (2, 1, k+5)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1, 3, 4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & k-1 & 1 & | & 3 \\ 2 & k-1 & k+5 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & k-1 & k+1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti. Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$
   – Se $k = 1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_3\}$$
   Notiamo che per $k = 1$ il vettore v_2 è il vettore nullo, quindi è ovviamente dipendente dagli altri due.
   – Se $k = -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla seconda colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2\}$$
   In questo caso anche la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2, quindi poteva essere preso come base di V anche l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_3\}$

b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, -2$ dalla matrice ridotta a gradini torniamo al sistema:
   $$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ (k-1)y - z = 2 \\ (k+2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{2}{k-1} \\ z = 0 \end{cases}$$
   Quindi $v_4 \in V$:
   $$v_4 = v_1 + \frac{2}{k-1}\, v_2$$
   Notiamo che se $k \neq 1, -2$, $\dim(V) = 3$, quindi $V = \mathbf{R}^3$ e necessariamente $v_4 \in V$.
   – Se $k = 1$ otteniamo la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -z = 2 \\ 0 = -6 \end{cases}$$
   L'ultima equazione risulta impossibile, quindi in questo caso $v_4 \notin V$:
   – Se $k = -2$ otteniamo la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -3y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + 5 \\ y = t \\ z = -3t - 2 \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$
   Anche in questo caso $v_4 \in V$:
   $$v_4 = (6t+5)\, v_1 + t \cdot v_2 + (-3t-2)\, v_3 \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$
   In particolare, ponendo per esempio $t = 0$, otteniamo la combinazione $v_4 = 5v_1 - 2v_3$.

□