

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.**

FOGLIO DI ESERCIZI 1- GEOMETRIA 2010/11

**Esercizio 1.1** (1.2). Per ognuna delle seguenti coppie di matrici  $A$ ,  $B$  e scalari  $\lambda$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ , calcolare  $A + B$ ,  $B - A$ ,  $\lambda A + \mu B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$ :

$$\begin{array}{lll} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} & \lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0 \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda = 2, \mu = -1 \end{array}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo dalla prima coppia di matrici:

$$\begin{array}{ll} A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & B - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ \lambda A + \mu B = \frac{1}{2} \cdot A + 0 \cdot B = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} & A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$\begin{array}{ll} A + B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda A + \mu B = 2A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -7 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} & AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 11 & -4 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 21 & -4 & -10 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

□

**Esercizio 1.2** (1.3). Date le seguenti matrici:

$$\begin{array}{lll} A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; & A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; & A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}; \\ A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; & A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \end{array}$$

calcolare, quando possibile, i prodotti  $A_i \cdot A_j$  per  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

SOLUZIONE:

Ricordiamo che una matrice è detta  $n \times m$  se ha  $n$  righe e  $m$  colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici  $A$  e  $B$  solamente se

- $A$  è del tipo  $n \times m$
- $B$  è del tipo  $m \times k$

(cioè se il numero delle colonne di  $A$  è uguale al numero delle righe di  $B$ ). Il risultato è una matrice  $C$  del tipo  $n \times k$ .

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot A_3 &= \begin{bmatrix} -2 & 32 \\ 26 & -4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} & A_2 \cdot A_1 &= \begin{bmatrix} 14 & 2 & 0 & -14 \\ -5 & 11 & 20 & -22 \end{bmatrix} & A_2 \cdot A_4 &= \begin{bmatrix} -8 & -20 \\ 11 & -10 \end{bmatrix} & A_2 \cdot A_5 &= \begin{bmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix} \\
 A_3 \cdot A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -10 & 25 \\ 8 & -4 & -1 \\ 20 & -23 & 30 \\ -4 & -7 & 23 \end{bmatrix} & A_3 \cdot A_6 &= \begin{bmatrix} -15 & 5 & -5 \\ -13 & 9 & 7 \\ -52 & 29 & 11 \\ -7 & 0 & -8 \end{bmatrix} \\
 A_4 \cdot A_2 &= \begin{bmatrix} 20 & -21 & 25 \\ 40 & -28 & 15 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix} & A_4 \cdot A_6 &= \begin{bmatrix} -49 & 28 & 12 \\ -77 & 49 & 31 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
 A_5 \cdot A_1 &= \begin{bmatrix} 18 & -8 & -10 & 12 \\ 32 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_5 \cdot A_4 &= \begin{bmatrix} -12 & 30 \\ -24 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_5 \cdot A_5 &= \begin{bmatrix} -12 & 8 & 14 \\ -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_6 \cdot A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -7 & -15 & 13 \\ 35 & -21 & -40 & 28 \end{bmatrix} & A_6 \cdot A_4 &= \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -35 & 10 \end{bmatrix} & A_6 \cdot A_5 &= \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

□

**Esercizio 1.3** (1.4). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti  $AI_4$  e  $I_4A^T$ .

SOLUZIONE:

Notiamo che la matrice quadrata  $I_4$  è detta *matrice identica* di ordine 4. In generale le matrici identiche (dei differenti ordini) vengono indicate  $I$ .

$$\begin{aligned}
 AI_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = A \\
 I_4A^T &= I_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = A^T
 \end{aligned}$$

□

**Esercizio 1.4** (1.5). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare  $3A - 2B$  e  $AB^T$ .

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned}
 3A - 2B &= \begin{bmatrix} -6 & \frac{3}{2} & 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 & \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{15}{2} & \frac{23}{3} & 1 \end{bmatrix} \\
 AB^T &= \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Notiamo che la matrice  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  è detta *matrice scalare*.

□

**Esercizio 1.5** (1.6). *Calcolare la potenza  $A^3$  della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Si tratta di eseguire due prodotti:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 5 \\ 5 & 26 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 1.6** (1.8). *Date le seguenti matrici  $A$ , calcolare, se esiste, l'inversa di  $A$  (cioè determinare se esiste la matrice  $B$  tale che  $AB = BA = I$ ).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti  $AB$  e  $BA$ , la matrice  $B$  deve essere  $2 \times 2$ . Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice  $2 \times 2$ . Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione  $AB = I$  segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice  $A$  non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice  $2 \times 2$ . Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione  $AB = I$  segue

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ -3(1+z)+2z=0 \\ -3w+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice  $B$  soddisfa anche la condizione  $BA = I$ , di conseguenza  $B$  è la matrice inversa di  $A$  cercata. Una tale matrice  $B$  inversa di  $A$  viene normalmente indicata con  $A^{-1}$ .

□

**Esercizio 1.7** (1.9). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare  $AB$ ,  $BA$ ,  $BC$  e  $CB$ .

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} & BA &= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \\ BC &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} & CB &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che  $AB \neq BA$ , mentre  $BC = CB$ . Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto  $C = 3I$ .

□

**Esercizio 1.8** (1.10). *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di  $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$ )*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

*Si verifichi che  $I$  è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di  $I$  anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di  $I$ .*

SOLUZIONE:

Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di  $I$ . Dobbiamo verificare che  $A + B$  e  $AB$  sono ancora elementi di  $I$ :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{bmatrix} \in I \\ AB &= \begin{bmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I \end{aligned}$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a  $I$  è che l'elemento di posizione 2, 1 si annulli.

□

**Esercizio 1.9** (1.11). *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici  $A, B$  non nulle tali che  $AB = 0$ .*

SOLUZIONE:

Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti  $A$  e  $B$  sono non nulle e  $AB = 0$ .

□

**Esercizio 1.10** (1.12). *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*e  $B$  una matrice tale che  $AB = BA$ . Si dimostri che*

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\lambda, x \in \mathbf{R}$ .

SOLUZIONE:

Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la generica matrice  $2 \times 2$ . Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione  $AB = BA$  segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza  $B$  deve essere del tipo

$$B = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\lambda, x \in \mathbf{R}$ .

□

**Esercizio 1.11** (1.13). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice  $B$  tale che  $A + B = C$ .

SOLUZIONE:

E' sufficiente osservare che se

$$A + B = C \Rightarrow -A + A + B = -A + C \Rightarrow B = C - A$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+2 & 0-3 \\ -1-0 & 5-5 & 2+6 \\ 2-2 & 1+1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 1.12** (1.14). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se  $D$  è combinazione lineare di  $A, B, C$ .

SOLUZIONE:

Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni e tre incognite. Procedendo per sostituzione otteniamo

$$\begin{cases} x = -2y + z \\ -3y + 3z = 1 \\ 3y + z = -1 \\ -6y + 6z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + z \\ -3y + 3z = 1 \\ z = -3y - 1 \\ -3y + 3z = -1 \end{cases}$$

Anche senza procedere ulteriormente vediamo che la seconda e quarta equazione sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e  $D$  non è combinazione lineare di  $A, B$  e  $C$ .

□

**Esercizio 1.13** (1.15). *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di  $k$  per cui  $C$  è combinazione lineare di  $A, B$ . In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

SOLUZIONE:

Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ y & x + 2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ y & x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ kx + 3y = 6 \\ y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \\ kx + 3 = 6 \\ y = 1 \\ x + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ kx = 3 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 3 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Quindi

- Se  $k = 3$  il sistema ammette la sola soluzione  $x = y = 1$  e  $A + B = C$ .
- Se  $k \neq 3$  il sistema non ammette soluzione e  $C$  non è combinazione di  $A$  e  $B$ .

□

**Esercizio 1.14** (1.18). *Si risolva il sistema  $Ax = b$  dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi  $Ax = b$  implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice  $A$  è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice  $b$  **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che  $A$  e  $b$  (oppure  $A|b$ ) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da  $A$  al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

□

**Esercizio 1.15** (1.20). *Si risolva il sistema  $Ax = b$  nei seguenti casi*

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

a) Calcoliamo il prodotto

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione  $Ax = b$  implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 = -6 \cdot 2 - 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Scriviamo direttamente il sistema associato a  $A$  e  $b$  *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} 4x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 6x_3 = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Notiamo subito che l'ultima equazione è impossibile, quindi il sistema non ammette soluzione.

c) Scriviamo direttamente il sistema associato a  $A$  e  $b$  *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ha tre incognite, ma solamente due equazioni (significative). Abbiamo quindi una variabile libera. Partiamo dall'ultima equazione (significativa) aggiungendo un parametro. Poniamo per esempio  $x_3 = t$  (Potevamo equivalentemente porre  $x_2 = t$ ):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(-t + 4) + t - 3 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che in questo caso il sistema ammette infinite soluzioni: ogni valore assegnato a  $t$  permette di trovare una delle infinite soluzioni.

□