CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

APPLICAZIONI LINEARI – GEOMETRIA E ALGEBRA 2010/11

Una **Applicazione lineare** $T : V \to W$ è una funzione tra due spazi vettoriali che gode delle seguenti proprietà:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

In particolare se $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ è una base di V e $v \in V$, allora:

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)$$

A ogni applicazione lineare può essere associata una **matrice** $A = M(T)$ che ha per colonne le immagini degli elementi della base di V, espresse rispetto alla base di W. Salvo indicazioni le basi di V e W sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(V) = A \cdot v \qquad \forall v \in V$$

Una applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola, cioè l'immagine del generico elemento:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che
  $$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$
- Le immagini di una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che
  $$T(e_1) = (1, 2, 1)$$
  $$T(e_2) = (1, 0, -1)$$
- La matrice associata rispetto a una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è
  $$A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
  Se non è specificato, la matrice si intende sempre associata rispetto alle basi canoniche.

Le tre precedenti definizioni definiscono la stessa applicazione lineare.

L'**Immagine** Im(T) di una applicazione lineare $T : V \to W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ di V:

$$\mathrm{Im(T)} = \{\mathrm{T(v)} \mid \mathrm{v} \in \mathrm{V}\} = \langle \mathrm{T(v_1)}, \dots, \mathrm{T(v_n)} \rangle \subseteq \mathrm{W}$$

Utilizzando la matrice $A = M(T)$ associata:

- Im(T) = spazio generato dalle colonne di A (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche)
- $\mathcal{B}$(Im(T)) = { colonne linearmente indipendenti di A } (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche).
- dim(Im(T)) = rg(A)

Il **Nucleo** $\ker(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è il sottospazio di V formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

Utilizzando la matrice A associata:

- $\ker(T) = \{$ soluzioni del sistema omogeneo associato a A $\}$ (Prestare attenzione se le basi di U e di V non sono quelle canoniche).
- $\dim(\ker(T)) = n - \mathrm{rg}(A)$, dove $n = \dim(V)$ = numero delle incognite del sistema lineare.

- Il teorema di **Nullità più rango** afferma che se $T : V \to W$ è un'applicazione lineare, allora
$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im(T)}) = \mathrm{n} = \dim(\mathrm{V})$$
- Una applicazione è detta **Iniettiva** se $\dim(\ker(T)) = 0$, cioè se $\ker(T) = \{0\}$.
- Una applicazione è detta **Suriettiva** se $\dim(\mathrm{Im(T)}) = \dim(\mathrm{W})$, cioè se $\mathrm{Im(T)} = \mathrm{W}$.
- Una applicazione è detta **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione è invertibile sse è biiettiva.

Bisogna prestare particolare attenzione quando l'applicazione non è definita sulle basi canoniche.