

**Esercizio 0.1.** Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & k-1 & k^2+2k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ k+7 \end{bmatrix} \quad \text{con } k \text{ parametro reale.}$$

- a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare  $Ax = b$  al variare di  $k$ .  
 b) Si determini una base del nucleo di  $A$ ,  $N(A)$ , al variare di  $k$ .

SOLUZIONE:

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice completa  $A|b$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & | & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & | & 4 \\ 2 & -1 & k-1 & k^2+2k & | & k+7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & k+1 & k^2+2k & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -1/2II \\ III - 1/2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2+2k & | & k+2 \end{bmatrix}$$

- a) Notiamo che  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < 4$  per ogni  $k$ , quindi il sistema lineare  $Ax = b$  ammette sempre infinite soluzioni. Per determinare le soluzioni dobbiamo distinguere due casi.

- Per  $k = -2$ , otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + s \\ x_2 = -1 - s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -1, 0, 0) + (1, -1, 1, 0)s + (0, 0, 0, 1)t \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

- Per  $k \neq -2$ , dividendo la terza riga per  $k+2$ , otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_3 + kx_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - kt \\ x_2 = -2 + kt \\ x_3 = 1 - kt \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -2, 1, 0) + (-k, k, -k, 1)t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- b) Per determinare una base del nucleo di  $A$  dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato ad  $A$ . Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi.

- Per  $k = -2$ , notiamo che  $\dim(N(A)) = \text{null}(A) = 4 - \text{rg}(A) = 4 - 2 = 2$ ; inoltre otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathcal{B}(N(A)) = \{(1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

- Per  $k \neq -2$ , notiamo che  $\dim(N(A)) = \text{null}(A) = 4 - \text{rg}(A) = 4 - 3 = 1$ ; inoltre, dividendo la terza riga per  $k+2$ , otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + kx_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -kt \\ x_2 = kt \\ x_3 = -kt \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathcal{B}(N(A)) = \{(-k, k, -k, 1)\}$$

□

**Esercizio 0.2.**

- a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  passante per i punti  $A = (1, -1, 0)$  e  $B = (0, -1, 3)$ , e della retta  $s$  la retta contenente  $C = (0, 2, -2)$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{OD} = (2, 0, -6)$ .
- b) Stabilire se  $r$  e  $s$  sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente  $r$  e  $s$ .
- c) Determinare la distanza del punto  $C$  dalla retta  $r$ .

SOLUZIONE:

- a) La retta  $r$  ha direzione  $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 3)$ , quindi  $r$  e  $s$  hanno equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + z = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \\ z = -2 - 6t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + z = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

- b) I vettori direzione  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  sono proporzionali, quindi  $r$  e  $s$  sono parallele ed in particolare complanari. Per determinare un'equazione del piano che le contiene consideriamo la direzione  $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, -2)$ , quindi

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = -1 + 3s \\ z = 3t - 2s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad 9x + 5y + 3z = 4$$

- c) Per determinare la distanza del punto  $C$  dalla retta  $r$  possiamo trovare il piano  $\pi'$  perpendicolare ad  $r$  e passante per  $C$ , determinare il punto  $C'$  intersezione tra tale piano  $\pi'$  e la retta  $r$ , e calcolare la distanza di  $C$  da  $C'$ .

Un piano ortogonale ad  $r$  ha equazione del tipo  $-x + 3z = d$ ; imponendo il passaggio per  $C$  otteniamo il piano  $\pi'$ :  $-x + 3z = -6$ . Di conseguenza

$$C' = \pi' \cap r: \begin{cases} -x + 3z = -6 \\ x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(1-t) + 3(3t) = -6 \\ x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \\ y = -1 \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$C' = \left(\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$$

Infine

$$d(C, r) = d(C, C') = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{46}{4}} = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

□

**Esercizio 0.3.** Siano  $U$  e  $W$  i sottospazi di  $\mathbf{R}^4$  definiti da

$$U = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_2 + (k-2)x_4 = 0, 3x_1 - x_2 - x_3 = k-1\},$$

$$W = \langle (0, 1, -1, 1), (-1, 1, 2, 1), (0, 2, 6, 2) \rangle.$$

- a) Per quali valori del parametro reale  $k$  il sottoinsieme  $U$  è sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^4$ ?
- b) Per i valori di  $k$  trovati in a) si determini una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- c) Per i valori di  $k$  trovati in a), si consideri l'intersezione  $S = U \cap W$ . Si mostri che  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^4$  e se ne calcoli la dimensione.

SOLUZIONE:

- a)  $U$  è sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^4$  quando si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi quando  $k = 1$ .
- b) Per trovare una base di  $U$ , dobbiamo prima esplicitare l'insieme:

$$U : \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = 3s - t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 3, 0)s + (0, 1, -1, 1)t \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Una base di  $U$  è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(U) = \{(1, 0, 3, 0), (0, 1, -1, 1)\}$$

Per trovare una base di  $W$  dobbiamo studiare l'indipendenza dei generatori. Riduciamo quindi a gradini la matrice formata dai tre generatori:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} II \\ I \\ III + II \\ IV - II \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III + 3II \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti ed una base di  $W$  è data da

$$\mathcal{B}(W) = \{(0, 1, -1, 1), (-1, 1, 2, 1), (0, 2, 6, 2)\}$$

- c) Per studiare l'intersezione  $S = U \cap W$  possiamo verificare se gli elementi della base di  $U$  appartengono a  $W$ , ovvero se sono combinazione lineare di  $w_1 = (0, 1, -1, 1)$ ,  $w_2 = (-1, 1, 2, 1)$ ,  $w_3 = (0, 2, 6, 2)$ . Consideriamo quindi la matrice formata dai vettori  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , come matrice dei coefficienti, e dai generatori di  $U$ ,  $u_1 = (1, 0, 3, 0)$  e  $u_2 = (0, 1, -1, 1)$ , come termini noti:

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} II \\ I \\ III + II \\ IV - II \end{array} \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow III + 3II \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Notiamo che  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|u_1) = \text{rg}(A|u_2) = 3$ , quindi sia  $u_1$  che  $u_2$  appartengono a  $W$ . Di conseguenza tutto lo spazio  $U$  è contenuto in  $W$  e  $S = U \cap W = U$ ; infine  $S = U \cap W$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2, in quanto coincide con  $U$ .

□

**Esercizio 0.4.** Sia  $V$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $2 \times 2$ . Si consideri la matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  e sia  $S$  il sottinsieme di  $V$  costituito dalle matrici che commutano con  $A$ :

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : AM = MA \right\}$$

- a) Mostrare che  $S$  è un sottospazio di  $V$ .
- b) Trovare una base di  $S$ .
- c) Verificare che  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$  appartiene ad  $S$  e determinare le sue coordinate nella base trovata nel punto b).

SOLUZIONE:

- a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
- **Somma.** Siano  $M_1$  e  $M_2$  due matrici di  $S$ , ovvero che commutano con  $A$ . Allora

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

Quindi anche la matrice  $M_1 + M_2$  commuta con  $A$  e appartiene a  $S$ .

- **prodotto.** Sia  $M$  una matrice di  $S$ , ovvero che commuta con  $A$ , e sia  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Allora

$$A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MA) = (\lambda M)A$$

Quindi anche la matrice  $\lambda M$  commuta con  $A$  e appartiene a  $S$ .

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di  $S$  imponendo la condizione  $AM = MA$ .

$$AM = \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ 2a - c & 2b - d \end{bmatrix} \qquad MA = \begin{bmatrix} 2b & -2a - b \\ 2d & -2c - d \end{bmatrix}$$

Quindi

$$AM = MA \Rightarrow \begin{cases} -2c = 2b \\ -2d = -2a - b \\ 2a - c = 2d \\ 2b - d = -2c - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ 2d = 2a + b \\ 2d = 2a + b \\ c = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2a - 2d \\ b = 2d - 2a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = t \\ b = -2t + 2s \\ c = 2t - 2s \\ d = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} t & -2t + 2s \\ 2t - 2s & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} s$$

Notiamo che anche a questo punto potevamo rispondere alla domanda a):  $S$  è infatti il sottospazio dello spazio delle matrici reali  $2 \times 2$  generato dalle matrici  $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ .

Infine  $S$  ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) È immediato verificare direttamente che  $B$  appartiene a  $S$  in quanto  $AB = BA$ . Inoltre  $3B_1 + 4B_2 = B$ , quindi  $B$  ha coordinate  $(3, 4)_{\mathcal{B}(S)}$ , rispetto alla base  $\mathcal{B}(S)$  scelta.

□

**Esercizio 0.5.** *Cos'è il prodotto scalare di due vettori geometrici? Dopo averne dato la definizione, dare un esempio di calcolo del prodotto scalare e dire quale relazione c'è tra prodotto scalare e l'angolo tra due vettori.*

**Esercizio 0.6.** *Cos'è uno spazio vettoriale reale? Dopo averne dato la definizione, dare due esempi di spazi vettoriali di dimensione 3.*