PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA* – B – 18/4/2011

CORSO DI LAUREA IN ING. IND. E ING. ELETT. TEL. (CORSO A-L)

Esercizio 0.1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & k+2 & k^2-k \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ k+3 \end{bmatrix} \qquad \textit{con } k \textit{ parametro reale.}$$

a) *Si determinino le soluzioni del sistema lineare $Ax = b$ al variare di k.*
b) *Si determini una base del nucleo di A, $N(A)$, al variare di k.*

Soluzione:
Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & | & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & -2 & k+2 & k^2-k & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ II-1/3I \\ III-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & -2 & k-1 & k^2-k & | & k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ -II \\ III-2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k^2-k & | & k-1 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < 4$ per ogni k, quindi il sistema lineare $Ax = b$ ammette sempre infinite soluzioni. Per determinare le soluzioni dobbiamo distinguere due casi.
   – Per $k = 1$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - s \\ x_2 = 1 \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0) + (-1, 0, 1, 0)s + (0, 0, 0, 1)t \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

   – Per $k \neq 1$, dividendo la terza riga per $k - 1$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 + kx_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + kt \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 - kt \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0) + (k, 0, -k, 1)t \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) Per determinare una base del nucleo di A dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato ad A. Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi.
   – Per $k = 1$, notiamo che $\dim(\text{N}(A)) = \text{null}(A) = 4 - \text{rg}(A) = 4 - 2 = 2$; inoltre otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\text{N}(A)) = \{(-1, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)\}$$

   – Per $k \neq 1$, notiamo che $\dim(\text{N}(A)) = \text{null}(A) = 4 - \text{rg}(A) = 4 - 3 = 1$; inoltre, dividendo la terza riga per $k - 1$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + kx_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = kt \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -kt \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\text{N}(A)) = \{(k, 0, -k, 1)\}$$

□

Esercizio 0.2.

a) *Determinare equazioni parametriche e cartasiane della retta r passante per i punti $A = (-1, 0, 1)$ e $B = (0, 3, 1)$, e della retta s la retta contenente $C = (0, -2, 2)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD} = (2, 6, 0)$.*

b) *Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.*

c) *Determinare la distanza del punto C dalla retta r.*

Soluzione:

a) La retta r ha direzione $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 0)$, quindi r e s hanno equazioni

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 3x - y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

b) I vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono proporzionali, quindi r e s sono parallele ed in particolare complanari. Per determinare un'equazione del piano che le contiene considerimo la direzione $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 1)$, quindi

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + t + s \\ y = 3t - 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad 3x - y - 5z = -8$$

c) Per determinare la distanza del punto C dalla retta r possiamo trovare il piano π' perpendicolare ad r e passante per C, determinare il punto C' intersezione tra tale piano π' e la retta r, e calcolare la distanza di C da C'.

Un piano ortogonale ad r ha equazione del tipo $x + 3y = d$; imponendo il passaggio per C otteniamo il piano $\pi' : \quad x + 3y = -6$. Di conseguenza

$$C' = \pi' \cap r : \begin{cases} x + 3y = -6 \\ x = -1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1 + t) + 3(3t) = -6 \\ x = -1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C' = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right)$$

Infine

$$d(C, r) = d(C, C') = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

□

Esercizio 0.3. *Siano U e W i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ definiti da*

$$U = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \ : \ 3x_1 - x_2 - x_3 = k, \ x_2 + (k-1)x_4 = 0\right\},$$
$$W = \langle(-1, 3, 8, 3), (-1, 2, 1, 2), (0, 2, 6, 2)\rangle.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k il sottoinsieme U è sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*

b) *Per i valori di k trovati in* a) *si determini una base di U e una base di W.*

c) *Per i valori di k trovati in* a)*, si consideri l'intersezione $S = U \cap W$. Si mostri che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ e se ne calcoli la dimensione.*

Soluzione:

a) U è sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ quando si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi quando $k = 0$.

b) Per trovare una base di U, dobbiamo prima esplicitare l'insieme:

$$U: \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = 3s - t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 3, 0)s + (0, 1, -1, 1)t \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Una base di U è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(U) = \{(1, 0, 3, 0),\ (0, 1, -1, 1)\}$$

Per trovare una base di W dobbiamo studiare l'indipendenza dei generatori. Riduciamo quindi a gradini la matrice formata dai tre generatori:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -I \\ II + 3I \\ III + 8I \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III - 7II \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti ed una base di W è data da

$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 3, 8, 3), (-1, 2, 1, 2), (0, 2, 6, 2)\}$$

c) Per studiare l'intersezione $S = U \cap W$ possiamo verificare se gli elementi della base di U appartengono a W, ovvero se sono combinazione lineare di $w_1 = (-1, 3, 8, 3)$, $w_2 = (-1, 2, 2, 1, 1)$, $w_3 = (0, 2, 6, 2)$. Consideriamo quindi la matrice formata dai vettori w_1, w_2 e w_3, come matrice dei coefficienti, e dai generatori di U, $u_1 = (1, 0, 3, 0)$ e $u_2 = (0, 1, -1, 1)$, come termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} -I \\ II + 3I \\ III + 8I \\ IV - II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 6 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow III - 7II \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|u_1) = \text{rg}(A|u_2) = 3$, quindi sia u_1 che u_2 appartengono a W. Di conseguenza tutto lo spazio U è contenuto in W e $S = U \cap W = U$; infine $S = U \cap W$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, in quanto coincide con U.

$\square$

Esercizio 0.4. *Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V\ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Trovare una base di S.*
c) *Verificare che $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ appartiene ad S e determinare le sue coordinate nella base trovata nel punto b).*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici di S, ovvero che commutano con A. Allora

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
   – **prodotto.** Sia M una matrice di S, ovvero che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MA) = (\lambda M)A$$

   Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} 2c & 2d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} \qquad MA = \begin{bmatrix} -2b & 2a+b \\ -2d & 2c+d \end{bmatrix}$$

Quindi

$$AM = MA \;\Rightarrow \begin{cases} 2c = -2b \\ 2d = 2a+b \\ -2a+c = -2d \\ -2b+d = 2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ b = 2d-2a \\ c = 2a-2d \\ c = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2a-2d \\ b = -2a+2d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = t \\ b = -2t+2s \\ c = 2t-2s \\ d = s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{bmatrix} t & -2t+2s \\ 2t-2s & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} s$$

Notiamo che anche a questo punto potevamo rispondere alla domanda a): S è infatti il sottospazio dello spazio delle matrice reali 2×2 generato dalle matrici $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Infine S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) È immediato verificare direttamente che B appartiene a S in quanto $AB = BA$. Inoltre $3B_1 + 4B_2 = B$, quindi B ha coordinate $(3,4)_{\mathcal{B}(S)}$, rispetto alla base $\mathcal{B}(S)$ scelta.

□

Esercizio 0.5. *Cos'è un* sottospazio vettoriale *di uno spazio vettoriale? Dopo averne dato la definizione, dare un esempio di sottospazio dello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$ *(diverso dallo spazio* $\mathbf{R}_3[x]$*).*

Esercizio 0.6. *Cos'è un* gruppo*? Dopo averne dato la definizione, dare un esempio di gruppo commutativo e uno di gruppo non commutativo.*