PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA* – B – 31/08/2011

CORSO DI LAUREA IN ING. IND. E ING. ELETT. TEL. (CORSO A-L)

Esercizio 0.1. *Siano* $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (-1, 1, 2)$, $D = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ *punti dello spazio.*

a) *Si mostri che* A, B, C, D *sono complanari e si calcoli un'equazione cartesiana del piano* π *che li contiene.*
b) *Sia* $E = (1, 1, 1)$. *Usando i vettori geometrici, si calcoli l'area del parallelogramma che ha* A, B, C *come vertici e il volume del parallelepipedo definito da* A, B, C, E.

Soluzione:

a) Per verificare che i quattro punti sono complanari basta determinare un'equazione del piano π passante per tre di essi, per esempio A, B e C, e verificare che D appartiene a tale piano. Poiché è richiesta un'equazione cartesiana, possiamo considerare il generico piano $ax+by+cz = d$ e imporre il passaggio per A, B, C ottenendo il sistema

$$\begin{cases} b + 2c = d \\ -a + c = d \\ -a + b + 2c = d \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -d \\ c = d \end{cases} \quad \forall d \in \mathbb{R}$$

Ponendo per esempio $d = 1$ otteniamo l'equazione

$$\pi : \quad -y + z = 1$$

È immediato verificare che il punto D appartiene a π, quindi i quattro punti sono complanari.

b) Il parallelogramma di vertici A, B, C ha come lati consecutivi i vettori geometrici $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$. Cominciamo a calcolare il prodotto vettoriale tra i due vettori

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = j - k = (0, 1, -1)$$

L'area del parallelogramma è il determinante di tale vettore:

$$\mathcal{A}(\text{parallelogramma}) = \sqrt{2}$$

Il parallelepipedo richiesto ha come spigoli consecutivi i vettori geometrici $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$ e $\overrightarrow{AE} = (1, 0, -1)$. Il suo volume è dato dal valore assoluto del prodotto misto $\overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$. Avendo già calcolato $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, otteniamo

$$\mathcal{V}(\text{parallelepipedo}) = |(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)| = 1$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i polinomi in* $\mathbb{R}_2[x]$

$$p_1(x) = 3x^2 + 5x + 8, \quad p_2(x) = x^2 + kx - 2, \quad p_3(x) = -x^2 + x - 10$$

(con k *parametro reale).*

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre polinomi sono dipendenti.*
b) *Al variare del parametro* k, *si trovi una base del sottospazio* $V = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ *generato dai tre polinomi.*

Soluzione:

Fissata la base $\{x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$, ai tre polinomi possiamo associare i vettori

$$p_1 = (3, 5, 8), \qquad p_2 = (1, k, -2), \quad p_3 = (-1, 1, -10)$$

a) Per stabilire se i vettori, e quindi i polinomi, sono dipendenti possiamo considerare la matrice associata ai tre vettori e calcolarne il determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & k & 1 \\ 8 & -2 & -10 \end{bmatrix}, \qquad \det(A) = -22k + 74$$

I tre polinomi sono dipendenti se la matrice ha determinante nullo, ovvero se $k = \frac{37}{11}$.

In alternativa si poteva ridurre A a gradini e calcolarne il rango.

b) Abbiamo visto al punto precedente se $k \neq \frac{37}{11}$, i tre polinomi sono indipendenti; di conseguenza

$$\mathcal{B}(V) = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} = \left\{3x^2 + 5x + 8,\ x^2 + kx - 2,\ -x^2 + x - 10\right\} \qquad \text{se } k \neq \frac{37}{11}.$$

Per $k = \frac{37}{11}$, basta osservare che i tre polinomi sono dipendenti, mentre, per esempio, $p_1(x)$ e $p_3(x)$ sono indipendenti in quanto non sono uno multiplo dell'altro. Quindi

$$\mathcal{B}(V) = \{p_1(x), p_3(x)\} = \left\{3x^2 + 5x + 8,\ -x^2 + x - 10\right\} \qquad \text{se } k = \frac{37}{11}.$$

□

Esercizio 0.3. *Dare una definizione di* rango *di una matrice. Che relazione c'è tra il rango di una matrice e il suo nucleo, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$?*
Sia v un vettore (colonna) di $\mathbb{R}^4$. Mostrare che la matrice $M = vv^T$ ha rango 0 o 1.

Esercizio 0.4. *Sia A la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare basi dei nuclei $E(0) = \mathrm{N}(A)$ e $E(-4) = \mathrm{N}(A + 4I_4)$.*
b) *Usando la parte* a) *mostrare che 0 e -4 sono gli unici autovalori.*
c) *La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una matrice P diagonalizzante, cioè tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.*

Soluzione:

a) Per trovare basi dei nuclei basta risolvere i sistemi omogenei associati:

$$E(0) = \mathrm{N}(A) = \mathrm{Sol}(A|0) : \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ II + I \\ III - I \\ IV + I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow\ -x + y - z + w = 0\ \Rightarrow \begin{cases} x = t - s + h \\ y = t \\ z = s \\ w = h \end{cases} \qquad \forall t, s, h \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(0)) = \{(1, 1, 0, 0),\ (-1, 0, 1, 0),\ (1, 0, 0, 1)\}$$

$$E(4) = \mathrm{N}(A + 4I_4) = \mathrm{Sol}(A + 4I_4|0) : \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ 3II - I \\ III + II \\ IV + III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/4II \\ 2III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 1/4III \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z + w = 0 \\ 2y + w - z = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(-4)) = \{(-1, 1, -1, 1)\}$$

b) Poiché la somma delle molteplicità geometriche dei due autovalori è 4, pari all'ordine di A, non possono esistere altri autovalori.

c) Per quanto visto al punto a), la matrice A è diagonalizzabile. Inoltre abbiamo già trovato gli autospazi, quindi la matrice P diagonalizzante, di cambiamento di base, è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice A è simmetrica, quindi è necessariamente diagonalizzabile.

□

Esercizio 0.5. *Si consideri l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si determino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*

b) *Si trovino basi ortonormali degli autospazi di T.*

Soluzione:

a) T è sicuramente diagonalizzabile in quanto la matrice associata rispetto alla base canonica è simmetrica.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda).$$

Di conseguenza gli autovalori di T sono $\lambda = 0, 1, 6$. Anche a questo punto potevamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto ha tre autovalori singoli.

b) Calcoliamo gli autospazi di T:

$$E(0) = \mathrm{N}(A) : \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 5II - 2I \\ 2III - II \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(0)) = \{(-1, 2, 1)\}, \qquad \mathcal{B}_{\text{ortonormale}}(E(0)) = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

$$E(1) = \mathrm{N}(A - I) : \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(1)) = \{(0, 1, -2)\}, \qquad \mathcal{B}_{\text{ortonormale}}(E(1)) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

$$E(6) = \mathrm{N}(A-6I): \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x=5t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(E(6)) = \{(5,2,1)\}, \qquad \mathcal{B}_{\text{ortonormale}}(E(6)) = \left\{ \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$

$\square$

Esercizio 0.6. *Dopo avere ricordato cos'è la* matrice associata *ad una funzione lineare $T: V \to V'$ rispetto ad una coppia di basi di V e V', dire che relazione c'è tra la matrice associata e l'immagine di T.*