PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA* – D – 29/6/2011

CORSO DI LAUREA IN ING. IND. E ING. ELETT. TEL. (CORSO A-L)

Esercizio 0.1. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 + 2x_4 = k \end{cases}$$

a) *Si studi la risolubilità del sistema al variare del parametro reale k.*
b) *Posto $k = -1$, si trovino tutte le soluzioni del sistema e si determini una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

SOLUZIONE:
Riduciamo a gradini la matrice $A|b$ associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & k & 0 & | & 1 \\ k & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - kII \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & k & 0 & | & 1 \\ 0 & 4-2k & 2-k^2 & 2 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & k-1 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che i termini $4 - 2k$ e $2 - k^2$, possibili pivot della seconda riga, non possono essere contemporaneamente nulli, quindi per ogni k si ha $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un paramentro.
b) Risolviamo il sistema per $k = -1$ ottenendo:

$$\begin{cases} x_1 = -4t + 3x_2 = t \\ x_3 = -6t + 5 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 5, -1) + (-4, 1, -6, 0)t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Senza fare ulteriori conti ne deduciamo che una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è

$$\mathcal{B}\left(\text{Sol}(Ax = 0)\right) = \{(-4, 1, -6, 0)\}$$

□

Esercizio 0.2. *Sia M la seguente matrice reale:*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3k-1 & k+3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{con } k \textit{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k la matrice M è invertibile.*
b) *Si calcoli l'inversa di M per $k = 4$.*

SOLUZIONE:

a) Una matrice è invertibile se ha determinante diverso da zero. Poiché $\det(M) = -7k + 29$, ne segue che M è invertibile se $k \neq \dfrac{29}{7}$.
b) Posto $k = 4$, otteniamo la matrice inversa

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -18 & 5 & -1 \\ 11 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 0.3. *Definire il* prodotto scalare *e il* prodotto vettoriale *di due vettori dello spazio. Che relazione c'è tra questi prodotti e il volume di un parallelepipedo?*
Dare un esempio di due vettori dello spazio con prodotto scalare nullo e un esempio di due vettori con prodotto vettoriale nullo.

Esercizio 0.4. *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (kx_1 + (1-k)x_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + (2k-2)x_2 + (k-2)x_3),$$

con k parametro reale.

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*

Soluzione:

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica ha per colonne le immagini degli elementi della base canonica, $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$M(T) = \begin{bmatrix} k & 1-k & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2k-2 & k-2 \end{bmatrix}$$

b) Per come è fatta la matrice, può essere comodo escludere il caso in cui $\mathrm{rg}(M) = 3$ calcolandone il determinante:

$$\det(M) = (k-2)(4k-2)$$

Dobbiamo quindi distinguere tre casi

- Se $k \neq \frac{1}{2}, 2$, abbiamo visto che $\det(M) \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 0$. Di conseguenza $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ e come base dell'immagine possiamo prendere anche la base canonica di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$; inoltre $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.
- Se $k = \frac{1}{2}$ otteniamo la matrice:

$$M(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2I \\ III - 2I \\ 2II - 4I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  quindi $\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 1$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right),\ \left(\frac{1}{2}, 2, -1\right) \right\}$. Per determinare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M, ottenendo $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(3, -3, 4)\}$.
- Se $k = 2$ otteniamo la matrice:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ 2III - I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

  quindi $\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 1$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \{(2, 2, 1),\ (-1, 2, 2)\}$. Per determinare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M ottenendo $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0, 0, 1)\}$.

□

Esercizio 0.5. *Si consideri la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Mostrare che $v = (0, 1, 1)$ è un autovettore di A. Calcolare gli autovalori di A.*
b) *Se esiste, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.*

Soluzione:

a) Per mostrare che $v = (0, 1, 1)$ è un autovettore di A basta verificare che $A \cdot v^t = \lambda \cdot v^t$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$. In effetti:

$$A \cdot v^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot v^t$$

Di conseguenza v è un autovettore di T relativo all'autovalore $\lambda = 3$. Notiamo che questo implica che il polinomio caratteristico di A sia divisibile per $\lambda - 3$.

Per determinare tutti gli autovalori di T, calcoliamo il polinomio caratteristico, eventualmente sfruttando la precedente informazione per scomporlo: $p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 6)$.

Di conseguenza gli autovalori di A sono $\lambda = -6$, singolo, e $\lambda = -3$, doppio.

b) Determiniamo gli autovettori di A:

$$E(6) = \mathrm{N}(A + 6I) = \langle (-1, -2, 2) \rangle$$
$$E(3) = \mathrm{N}(A - 3I) = \langle (-2, 1, 0),\ (2, 0, 1) \rangle$$

Notiamo che i generatori di $E(3)$ trovati non sono ortogonali, dobbiamo quindi utilizzare Gram-Schmidt ottendo

$$E(3) = \langle (-2, 1, 0),\ (2, 4, 5) \rangle = \langle\ \frac{\sqrt{5}}{5}(-2, 1, 0),\ \frac{\sqrt{5}}{15}(2, 4, 5)\ \rangle$$

Infine la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ richiesta:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \frac{1}{3}(-1, -2, 2),\ \frac{\sqrt{5}}{5}(-2, 1, 0),\ \frac{\sqrt{5}}{15}(2, 4, 5) \right\}$$

□

Esercizio 0.6. *Quale proprietà caratterizza le* matrici ortogonali*? Dare un esempio di matrice ortogonale* 3×3 *e di una matrice di rotazione* 3×3*.*