PROVA INTERMEDIA - *GEOMETRIA E ALGEBRA* – C – 29/6/2011

CORSO DI LAUREA IN ING. IND. E ING. ELETT. TEL. (CORSO A-L)

Esercizio 0.1. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + kx_3 + kx_4 = 1 \\ kx_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + kx_3 + 2x_4 = k \end{cases}$$

a) *Si studi la risolubilità del sistema al variare del parametro reale k.*
b) *Posto $k = 1$, si trovino tutte le soluzioni del sistema e si determini una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice $A|b$ associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & k & k & | & 1 \\ k & -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & k & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - kII \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & k & | & 1 \\ 0 & -2+2k & 1-k^2 & 1-k^2 & | & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 2-k & | & k-1 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che i termini $-2+2k$ e $1-k^2$, possibili pivot della seconda riga, sono contemporaneamente nulli solo se $k = 1$. Si tratta quindi di distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un paramentro.
   – Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzione.
   – Se $k = 1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   quindi in questo caso $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da due parametri.

b) Risolviamo il sistema per $k = 1$ ottenendo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t - sx_2 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0) + (2, 1, 0, 0) + s(-1, 0, 1, 0)t \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Senza fare ulteriori conti ne deduciamo che una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è

$$\mathcal{B}\left(\text{Sol}(Ax = 0)\right) = \{(-1, 0, 1, 0),\ (2, 1, 0, 0)\}$$

□

Esercizio 0.2. *Sia M la seguente matrice reale:*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 2 & k+4 & 2-k \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{con } k \textit{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k la matrice M è invertibile.*
b) *Si calcoli l'inversa di M per $k = 3$.*

Soluzione:

a) Una matrice è invertibile se ha determinante diverso da zero. Poiché $\det(M) = 3k - 8$, ne segue che M è invertibile se $k \neq \dfrac{8}{3}$.

b) Posto $k = 2$, otteniamo la matrice inversa

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -7 & -18 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 0.3. *Cos'è la* dimensione *di uno spazio vettoriale? Quando uno spazio vettoriale si dice* finitamente generato*?*
Dare un esempio di spazio vettoriale di dimensione 4, diverso da $\mathbb{R}^4$. Giustificare la risposta.

Esercizio 0.4. *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, (k-1)x_1 + kx_3, (2k-2)x_1 + (k-2)x_2 + x_3),$$

con k parametro reale.

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*

Soluzione:

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica ha per colonne le immagini degli elementi della base canonica, $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k-1 & 0 & k \\ 2k-2 & k-2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Per come è fatta la matrice, può essere comodo escludere il caso in cui $\mathrm{rg}(M) = 3$ calcolandone il determinante:

$$\det(M) = -(k-2)(k+1)$$

Dobbiamo quindi distinguere tre casi

- Se $k \neq -1, 2$, abbiamo visto che $\det(M) \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 0$. Di conseguenza $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ e come base dell'immagine possiamo prendere anche la base canonica di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$; inoltre $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.
- Se $k = -1$ otteniamo la matrice:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III + 2I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi $\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 1$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \{(2,-2,-4),\ (0,0,-3)\}$. Per determinare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M, ottenendo $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(1,-2,-2)\}$.
- Se $k = 2$ otteniamo la matrice:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi $\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 1$. Inoltre una base di $\mathrm{Im}(T)$ è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_3)\} = \{(2,1,2),\ (1,2,1)\}$. Per determinare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a M ottenendo $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,1,0)\}$.

$\square$

Esercizio 0.5. *Si consideri la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Mostrare che $v = (1,0,1)$ è un autovettore di A. Calcolare gli autovalori di A.*
b) *Se esiste, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.*

Soluzione:

a) Per mostrare che $v = (1,0,1)$ è un autovettore di A basta verificare che $A \cdot v^t = \lambda \cdot v^t$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$. In effetti:
$$A \cdot v^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot v^t$$
Di conseguenza v è un autovettore di T relativo all'autovalore $\lambda = 3$. Notiamo che questo implica che il polinomio caratteristico di A sia divisibile per $\lambda - 3$.
Per determinare tutti gli autovalori di T, calcoliamo il polinomio caratteristico, eventualmente sfruttando la precedente informazione per scomporlo: $p_A(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda+6)$.
Di conseguenza gli autovalori di A sono $\lambda = -6$, singolo, e $\lambda = -3$, doppio.

b) Determiniamo gli autovettori di A:
$$E(6) = \mathrm{N}(A + 6I) = \langle (2,1,-2) \rangle$$
$$E(3) = \mathrm{N}(A - 3I) = \langle (1,-2,0),\ (0,2,1) \rangle$$
Notiamo che i generatori di $E(3)$ trovati non sono ortogonali, dobbiamo quindi utilizzare Gram-Schmidt ottendo
$$E(3) = \langle (1,-2,0),\ (4,2,5) \rangle = \langle\ \frac{\sqrt{5}}{5}(1,-2,0),\ \frac{\sqrt{5}}{15}(4,2,5)\ \rangle$$
Infine la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ richiesta:
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \frac{1}{3}(2,1,-2),\ \frac{\sqrt{5}}{5}(1,2,0),\ \frac{\sqrt{5}}{15}(4,2,5) \right\}$$

□

Esercizio 0.6. *Dare la definizione di* nucleo *e* immagine *di una funzione lineare T. Che relazione c'è tra il nucleo di T e la sua iniettività o suriettività?*
Esiste una funzione lineare iniettiva da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$? Giustificare la risposta.