CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

RANGO, INDIPENDENZA LINEARE E BASI – GEOMETRIA 2009/10

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Osservazioni

- Come conseguenza delle proprietà 3) e 4) si ha che se A è una matrice $n \times m$, allora $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$
- Per utilizzare la proprietà 1) si può anche ridurre (parzialmente) a gradini la matrice.

Rouchè-Capelli.
Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

Inoltre:

- Ammette un'unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite.
- Ammette infinite soluzioni se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) <$ numero delle incognite.

Spazi vettoriali.
Sia di qui in poi V uno spazio vettoriale e $v, v_1, \dots, v_n$ elementi di V. (V può essere un sottospazio di $\mathbf{R}^m$, o uno spazio di matrici, o uno spazio di polinomi, o...).

---

v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ se l'equazione:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = v$$

ammette soluzione.
Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|b$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$ e b è data dal vettore v. In tale caso:

v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ sse $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

$v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

ammette la **sola** soluzione nulla $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$.
Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|0$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$. In tale caso:

$v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** sse $\text{rg}(A) = n$

Sia $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sottinsieme di V. Diciamo che S è una **base** di V se:

(1) S è un insieme generatore di V: $V = \langle S \rangle$, cioè ogni elemento di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S.

(2) Gli elementi di S sono linearmente indipendenti.

La **dimensione** di uno spazio vettoriale corrisponde al numero di elementi di una sua base.

Nel caso particolare in cui $V = \mathbf{R}^n$ sappiamo che S per essere una base deve essere formato da n elementi, ed è sufficiente verificare che gli n elementi di S siano linearmente indipendenti. Ragionando sui ranghi, n **vettori di** $\mathbf{R}^n$ **formano una base di** $\mathbf{R}^n$ **se e solo se la matrice associata ha rango** n**.**

- Nel caso particolare di $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\rangle \subseteq \mathbf{R}^m$, se indichiamo con A la matrice formata dai vettori colonna $v_1, \dots, v_n$, allora:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \mathrm{rg}(A) \\ \mathcal{B}(V) &= \{\text{vettori linearmente indipendenti tra } v_1, \dots, v_n\} \\ &= \{\text{vettori tra } v_1, \dots, v_n \text{ corrispondenti ai pivot di } A\ \} \end{aligned}$$

- Nel caso particolare di $V = \{$ soluzioni di un sistema omogeneo $\}$, se indichiamo con A la matrice associata al sistema e con n il numero delle incognite, allora:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= n - \mathrm{rg}(A) \\ \mathcal{B}(V) &= \{\text{generatori delle soluzioni una volta scritte in forma vettoriale }\} \end{aligned}$$
