

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 12 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 12.1. [13.4] Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:

- (1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$
- (2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$
- (3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
- (4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$
- (5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

- a) Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.
- b) Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.
- c) Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.

Esercizio 12.2. [13.5] Riconoscere che le seguenti coniche $f(x, y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.

- (1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$
- (2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$
- (3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 12.3. [13.6] Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:

- a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
- b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$
- c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Esercizio 12.4. [13.7] Ridurre in forma canonica le coniche dell'esercizio precedente e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra.

Esercizio 12.5. [13.8] Sia \mathcal{C} la conica di equazione

$$\mathcal{C} : 2xy - x - 3y = k$$

- (1) Stabilire per quali valori di k la conica \mathcal{C} è degenera.
- (2) Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.
- (3) Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di \mathcal{C} .

Esercizio 12.6. [13.9] Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche \mathcal{C}_k di equazione

$$\mathcal{C}_k : 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

- a) Esistono coniche degeneri nella famiglia?
- b) Si classifichi la conica \mathcal{C}_k al variare di k .
- c) Si determinino le coordinate dei centri delle coniche \mathcal{C}_k (quando esistono).

Esercizio 12.7. [13.11] Sia \mathcal{C}_k la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

- a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.
- b) Trovare le coniche degeneri della famiglia.
- c) Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.

Esercizio 12.8. [13.13] Fissato il parametro reale t , sia \mathcal{C}_t la conica di equazione

$$\mathcal{C}_t : tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

- Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.
- Determinare il tipo di conica al variare del parametro t .
- Scrivere la forma canonica di \mathcal{C}_t per $t = -1$.

Esercizio 12.9. [13.14] Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcolare autovalori e autovettori di A .
- Calcolare una matrice diagonalizzante di A , che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.
- Scrivere la forma canonica della conica \mathcal{C} con matrice associata A

Esercizio 12.10. [13.16] Sia \mathcal{C} la conica di equazione

$$\mathcal{C} : 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

- Stabilire il tipo di conica.
- Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.
- Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.

Esercizio 12.11. [13.17] Sia \mathcal{C} la conica di equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

- Si determini il tipo di conica.
- Si trovi la forma canonica della conica.
- Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.