

**Esercizio 9.1.** [9.3] Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  definito da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Stabilire se esistono autovettori di  $T$  ed eventualmente determinarli.
- Stabilire se  $T$  è diagonalizzabile.
- Determinare la base rispetto alla quale  $T$  ha matrice associata  $D$  diagonale e determinare la matrice diagonale  $D$  e la matrice  $P$  diagonalizzante (cioè tale che  $P^{-1}AP = D$ ).

**Esercizio 9.2.** [9.5] [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Riconoscere che le due seguenti matrici  $M$  sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice  $P$  diagonalizzante (tale cioè che valga  $P^{-1}MP = D$ , con  $D$  matrice diagonale; ricordiamo che  $P$  è una matrice le cui colonne sono autovettori di  $M$ ).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.3.** [9.7] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.
- Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.
- Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.

**Esercizio 9.4.** [9.9] Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'endomorfismo a cui è associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di  $T$  e si stabilisca se  $T$  è diagonalizzabile.
- Si determini una base di  $\mathbf{R}^3$  formata da autovettori di  $T$ .

**Esercizio 9.5.** [9.12] Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x, y + 3z, x + y - z)$$

- Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di  $T$ .
- Si stabilisca se  $T$  è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice  $P$  diagonalizzante.
- Si determini una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^3$  tale che la matrice associata a  $T$  rispetto a  $\mathcal{B}$  sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.

**Esercizio 9.6.** [9.13] [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale  $k$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.7.** [9.16] Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{ 1, 1, 0 \}, \{ 0, 3, 0 \}, \{ 0, 1, 1 \} \}$$

- Si determinino gli autovalori di  $T$ .
- Si determinino gli autovettori e gli autospazi di  $T$ .
- Si stabilisca se  $T$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 9.8.** [9.17] Sia  $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$  una base di  $\mathbf{R}^3$  e sia  $S$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  con matrice associata rispetto a  $\mathcal{B}$

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Trovare gli autovalori (reali) di  $S$ .
- Trovare gli autovettori di  $S$  e stabilire se  $S$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 9.9.** [9.22] Data la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si discuta la diagonalizzabilità di  $M$  al variare del parametro  $k \in \mathbf{R}$ .
- Per  $k = 2$ , si determini una base di  $\mathbf{R}^4$  formata da autovettori di  $M$ .

**Esercizio 9.10.** [9.23 e 9.26] Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Determinare per quali valori di  $k$  la matrice  $B$  è diagonalizzabile.
- Stabilire per quali valori di  $k$  le due matrici  $A$  e  $B$  sono simili.
- Per  $k = 3$  le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?

**Esercizio 9.11.** [9.32] Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}_2[x]$  che associa al polinomio  $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$  il polinomio

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

- Trovare la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\{x^2, x, 1\}$ .
- Calcolare gli autovalori di  $T$ .