CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 8 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 8.1. *[8.40]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1, 0),\ (1, 1)\ \}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ due basi di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Esercizio 8.2. *[8.41]* Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ rispettivamente la base canonica e un'altra base di V.

a) Determinare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$.
b) Svolgere l'esercizio precedente utilizzando la matrice P.

Esercizio 8.3. *[8.55]* Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.
b) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 8.4. *[8.49]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (-1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 2)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 8.5. *[9.1]* Verificare che $v = (1, 0, 0, 1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Esercizio 8.6. *[9.2]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) Verificare che i vettori $v_1 = (0, 3, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.
b) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
c) Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.
d) Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).