CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 7 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 7.1. *[8.8]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare una base di Nucleo e Immagine di T.
b) Stabilire se $(-3, 2, 1)$ appartiene a T.

Esercizio 7.2. *[8.7]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1),\ T(e_2) = (1, 0, -1)$.
a) Esplicitare $T(x, y)$.
b) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).
c) Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 7.3. *[8.6]* Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.
a) Determinare Nucleo e Immagine di T.
b) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).
c) Determinare $T(1, 2)$ usando la definizione e usando la matrice A.

Esercizio 7.4. *[8.9]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.

Esercizio 7.5. *[8.11]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.
a) Trovare una base del nucleo N(T) e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.
b) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 7.6. *[8.30]* Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stabilire se T invertibile.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 7.7. *[8.32]* Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.
b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.

Esercizio 7.8. *[8.17]*
a) Verificare che le relazioni

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.
b) Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.
c) Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.

Esercizio 7.9. *[8.36]* Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.
b) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Esercizio 7.10. *[8.44]* Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (0, 2, 2),\ (0, 0, 3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Si scriva la matrice associata a S rispetto alle basi canoniche.
b) Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.

Esercizio 7.11. *[8.50]* Sia

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (0, -1, 0),\ v_3 = (2, 0, 0)\}$$

una base di $\mathbf{R}^3$ e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T(v_1) = (3, 1, 2), \qquad T(v_2) = (0, 1, 1), \qquad T(v_3) = (6, 4, 6)$$

a) Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.
b) Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di T.
c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v_k = (k + 1, 0, k)$ appartiene all'Immagine di T.

Esercizio 7.12. *[8.53]* Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.

Esercizio 7.13. *[v. 8.56]* Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:

$$S(A) = A - A^T$$

a) Si determini il nucleo e l'immagine di S.
b) Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Esercizio 7.14. *[8.58]* Si $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + (b - c)x + a - c$$

a) Si trovi la matrice rappresentativa di tale applicazione rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{x^2 + 2,\ x - 1,\ x + 1\right\}$$

b) Si trovi la dimensione e una base di N(f) e Im(f).