CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 6 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 6.1. *[7.12]* Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.
b) Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.

Esercizio 6.2. *[7.15]* Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} kx_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k-1 \\ kx_1 + kx_2 = 2k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) Si dica per quali valori di k il sistema ammette soluzione, specificando se e quando ne ammette una o infinite.
b) Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, si determinino le sue soluzioni.

Esercizio 6.3. *[7.18]* Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale.}$$

a) Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.
b) Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.

Esercizio 6.4. *[7.29]* Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori:

$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k.

Esercizio 6.5. *[7.30]* Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$

Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 6.6. *[7.68]* Sia dato l'insieme

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$ e determinarne una base.

Esercizio 6.7. *[7.81]* Sia W il sottoinsieme dello spazio di polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ definito da

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(1) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Trovare una base e la dimensione di W.
c) Determinare le coordinate del polinomio $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ rispetto alla base trovata.

Esercizio 6.8. *[7.69]* Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) Verificare che l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 6.9. *[7.70]* Si considerino i polinomi $p_1 = x^2+ax+b+c$, $p_2 = x^2+bx+a+c$, $p_3 = x^2+cx+a+b$.

a) Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[x]$.
b) Calcolare la dimensione e una base dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.

Esercizio 6.10. *[7.73]* Si considerino i polinomi a coefficienti reali

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.

Esercizio 6.11. *[7.82]* Sia S l'insieme delle matrici simmetriche (Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$):

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}$$

.

a) Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.
b) Determinare una base di S.

Esercizio 6.12. *[7.85]* Si consideri il sottospazio

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a + b + 3c & 2b - 6c \\ a + 3b - 7c & 4a + 8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.

a) Determinare una base di S.
b) Stabilire se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ (ed in caso positivo esprimere A come combinazione lineare della base trovata in a)).

Esercizio 6.13. *[7.86]* Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

Mostrare che S è un sottospazio di V e calcolarne la dimensione e una base.

Esercizio 6.14. *[7.88]* Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Si determini una base del sottospazio $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}$.
b) Mostrare che il sottoinsieme $W = \{X \in U : X \text{ è invertibile}\}$ non è un sottospazio vettoriale di U.

Esercizio 6.15. *[7.89]* Sia $W = \langle A,\ B\ , C \rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Esercizio 6.16. *[6.5]* Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.17. *[6.7]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
b) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.