CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 5 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 5.1. *[5.6]* Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile, v_1 come combinazione lineare di v_2 e v_3, v_2 come combinazione lineare di v_1 e v_3, e v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2

Esercizio 5.2. *[5.9]*

a) Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbf{R}^5$ sono linearmente dipendenti:

$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$

b) Per i valori di k determinati in *a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.

Esercizio 5.3. *[7.23]* Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$.

$$v_1 \equiv (1, 2, -2), \qquad v_2 \equiv (1, 1, -3), \qquad v_3 \equiv (3, 7, k-6)$$

Esercizio 5.4. *[7.25]* In $\mathbf{R}^3$ siano

$$v_1 = (k, 2, 1), \quad v_2 = (-2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) Si stabilisca per quali valori di k i tre vettori costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Per i valori trovati al punto a), si calcolino le coordinate del vettore $v = (-2, 1, 2)$ rispetto a tale base.

Esercizio 5.5. *[7.26]* Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) Trovare una base di V.
b) Determinare le coordinate del vettore $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto a).

Esercizio 5.6. *[7.31]* Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (3, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-6, 2, -4, 0), \quad v_3 = (-3, k, k-3, 0)$$

a) Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.
b) Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Esercizio 5.7. *[7.37]* Sia

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k+3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.
b) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k+6, -3)$ appartiene a V.

Esercizio 5.8. *[7.38]* Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (0, k-1, k-1), \quad v_3 = (2, 1, k+5)$$

dove k è un parametro reale.

a) Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.
b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1, 3, 4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Esercizio 5.9. *[7.49]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?

b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 5.10. *[7.51]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 5.11. *[7.53]* Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) Trovare una base di W.
b) Determinare le coordinate del vettore $v = (0, 1, 1, 1, -2) \in W$ rispetto alla base trovata.

Esercizio 5.12. *[7.54]* Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
b) Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.

Esercizio 5.13. *[7.55]* Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
b) Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.

Esercizio 5.14. *[7.56]* Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) Per quali valori del parametro reale k l'insieme S é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?
b) Per i valori determinati al punto a), trovare una base di S.

Esercizio 5.15. *[7.59]* Sia

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k + 1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k + 2,\right.$$
$$\left. 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.

Esercizio 5.16. *[7.61]* Sia A la matrice reale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.
b) Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.

Esercizio 5.17. *[7.62]*

a) Sia

$$V = \langle\ (1, 2, 1),\ (-1, 3, 0),\ (3, 1, 2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) Sia

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0 \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.

□