

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA**

FOGLIO DI ESERCIZI 2- GEOMETRIA 2009/10

**Esercizio 2.1.** [1.2] Per ognuna delle seguenti coppie di matrici  $A$ ,  $B$  e scalari  $\lambda$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ , calcolare  $A + B$ ,  $B - A$ ,  $\lambda A + \mu B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2, \mu = -1$$

**Esercizio 2.2.** [1.3] Date le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti  $A_i \cdot A_j$  per  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

**Esercizio 2.3.** [1.5] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare  $3A - 2B$  e  $AB^T$ .

**Esercizio 2.4.** [1.6] Calcolare la potenza  $A^3$  della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 2.5.** [1.8] Date le seguenti matrici  $A$ , calcolare, se esiste, l'inversa di  $A$  (cioè determinare se esiste la matrice  $B$  tale che  $AB = BA = I$ ).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 2.6.** [1.9] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare  $AB$ ,  $BA$ ,  $BC$  e  $CB$ .

**Esercizio 2.7.** [1.10] Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di  $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$ )

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che  $I$  è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di  $I$  anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di  $I$ .

**Esercizio 2.8.** [3.1] Dimostrare che l'insieme

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}, a, b \neq 0 \right\}$$

forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.

**Esercizio 2.9.** [1.11] Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici  $A, B$  non nulle tali che  $AB = 0$ .

**Esercizio 2.10.** [1.12] Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e  $B$  una matrice tale che  $AB = BA$ . Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\lambda, x \in \mathbf{R}$ .

**Esercizio 2.11.** [1.13] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice  $B$  tale che  $A + B = C$ .

**Esercizio 2.12.** [1.14] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se  $D$  è combinazione lineare di  $A, B, C$ .

**Esercizio 2.13.** [1.15] Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di  $k$  per cui  $C$  è combinazione lineare di  $A, B$ . In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

**Esercizio 2.14.** [1.18] Si risolva il sistema  $Ax = b$  dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 2.15.** [1.20] Si risolva il sistema  $Ax = b$  nei seguenti casi

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$