

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 1- GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 1.1. [2.2] Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio

- (a) Passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(3, -1, 0)$.
- (b) Passante per il punto $P(1, 3, 1)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OQ} = (2, 0, 0)$.
- (c) Di equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 1.2. [v. 2.3]

- a) Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$. Il punto $P(0, 2, 0)$ appartiene a tale piano?
- b) Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π .

Esercizio 1.3. [2.4] Sia r la retta di \mathbf{R}^3 passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia s la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$.

- a) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).
- b) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

Esercizio 1.4. [2.5]

- a) Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

- b) Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.

Esercizio 1.5. [2.7]

- a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2, 3, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0, 0, 0)$ e $D = (4, 6, 0)$.
- b) Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s .

Esercizio 1.6. [2.9] Si considerino le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente r e s .
- b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1, 2, -3)$ e perpendicolare a r .
- c) Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette r e s .

Esercizio 1.7. [2.10] Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0, 0, 1)$ e $B = (-2, -1, 0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1, 1, 1)$ e $D = (-1, 0, 0)$.

- a) Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.
- b) Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto a).

Esercizio 1.8. [2.13] Si considerino i piani dello spazio

$$\pi : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad \pi' : 8x + y - z = 0.$$

- Stabilire la posizione reciproca dei due piani.
- Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani π e π' .

Esercizio 1.9. [2.18] Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

- Si stabilisca se il piano π_3 contiene r .
- Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r .
- Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1 .

Esercizio 1.10. [2.20] Si considerino la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani $\pi_k : 2x + ky - z = 1$ dove k è un parametro reale.
Si determini per quali k il piano π_k risulta parallelo a r .

Esercizio 1.11. [2.22] Verificare che i quattro punti

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (2, 1, 0), \quad P_3 = (-1, 0, -1), \quad P_4 = (0, 0, -1)$$

sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.

Esercizio 1.12. [12.16] Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 2)$ e $A_3(1, k)$ ha area 5.

Esercizio 1.13. [v. 12.23] Siano $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, $C = (-1, 0, -1)$ punti dello spazio.

- Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C .
- Stabilire se il punto $D = (2, 2, 2)$ appartiene al piano contenente A, B, C .

Esercizio 1.14. [12.19] Calcolare il volume del parallelepipedo di lati $u(1, 0, 0)$, $v(-3, 1, 1)$ e $w(-2, 2, 5)$.

Esercizio 1.15. [12.20] Siano $P_1 = (1, -1, 0)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, $P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, e $P_4 = (1, 2, 1)$ quattro punti nello spazio.

- Calcolare l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$.
- Calcolare il volume del prisma con base il triangolo $P_1P_2P_3$ e lato il segmento P_1P_4 .

Esercizio 1.16. [12.22] Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni:

$$\pi_1 : 2x - y = 1, \quad \pi_2 : x + y + z = 0, \quad \pi_3 : x - 2z = 1.$$

- Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
- Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
- Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C , con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.