CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 12 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 12.1 (13.4)**.** *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x,y)=0$:*

(1) $9x^2+4xy+6y^2-10=0$

(2) $x^2+6xy+y^2+2x+y+\dfrac{1}{2}=0$

(3) $5x^2+5y^2-6xy+16\sqrt{2}x+38=0$

(4) $25x^2-7y^2+48y+7=0$

(5) $x^2+4xy+4y^2-6x+1=0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.*
b) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
c) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.*

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $9x^2+4xy+6y^2=10$.

a) Le matrici associate alla conica sono

$$A'=\begin{bmatrix}9&2&0\\2&6&0\\0&0&-10\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad A=\begin{bmatrix}9&2\\2&6\end{bmatrix}\ \text{associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3=\det(A')\neq 0$, quindi la conica è non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di A, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2=\det(A)=50>0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'ellisse}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}9-\lambda&2\\2&6-\lambda\end{bmatrix}=(9-\lambda)(6-\lambda)-4=\lambda^2-15\lambda+50$$

Quindi A ha due autovalori concordi($\lambda_1=10,\ \lambda_2=5$), $I_2=10\cdot 5>0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Per determinare il centro risolviamo il sistema

$$A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+h=0\ \Rightarrow\ A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=-h$$

dove

$$h=\begin{bmatrix}1/2 \text{ coeff. della } x\\1/2 \text{ coeff. della } y\end{bmatrix}$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c}9&2&0\\2&6&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{c}1/2II\\I\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1&3&0\\9&2&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{c}\\II-9I\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1&3&0\\0&-25&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\quad\Rightarrow\ C=(0,0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y che indicano la traslazione.

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione gli autovettori di A. Dobbiamo quindi prima determinare gli autovettori: Calcoliamo l'autospazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-10I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1&2&0\\2&-4&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{c}\\II+2I\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}-1&2&0\\0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\ -x+2y=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=2t\\y=t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ E(10)=\langle(2,1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-5I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & \mid & 0 \\ 2 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(5) = \langle(1,-2)\rangle$$

Infine:

$$a_1: \begin{cases} x = 0+2t \\ y = 0+t \end{cases} \Rightarrow x-2y=0$$

$$a_2: \begin{cases} x = 0+t \\ y = 0-2t \end{cases} \Rightarrow 2x+y=0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2+6xy+y^2+2x+y+\dfrac{1}{2}=0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di A, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2 = \det(A) = -80 < 0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'iperbole}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Quindi A ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & -1 \\ 3 & 1 & \mid & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & -1 \\ 6 & 2 & \mid & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-6I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & -1 \\ 0 & -16 & \mid & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = -\frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori di A. Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & \mid & 0 \\ 3 & -3 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(4) = \langle(1,1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A+2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & \mid & 0 \\ 3 & 3 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(-2) = \langle(1,-1)\rangle$$

Infine gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{16}+t \\ y = -\frac{5}{16}+t \end{cases} \Rightarrow 4x-4y-1=0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{16}+t \\ y = -\frac{5}{16}-t \end{cases} \Rightarrow 8x+8y+3=0$$

(3) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori concordi ($\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$), $I_2 = det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per determinare gli assi calcoliamo gli autospazi.

Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle(-1, 1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle(1, 1)\rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x - y + \sqrt{2} = 0$$

(4) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25 - \lambda)(-7 - \lambda)$$

Quindi A ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(0,\, \frac{24}{7}\right)$$

Per determinare gli assi cerchiamo gli autovettori di A.

Calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -32 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -32y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow E(25) = \langle(1, 0)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A+7I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle$$

E' chiaro che abbiamo eseguito calcoli sostanzialmente inutili. Infatti la ricerca degli autospazi corrisponde alla rotazione della conica. Il fatto che nell'equazione manchi il termine in xy, ovvero A è diagonale, indica che non è necessario effettuare la rotazione e che possiamo prendere come autovettori i vettori della base canonica $(1,0)$ e $(0,1)$.
Infine gli assi sono le rette per il centro parallele agli autovettori (in questo caso parallele agli assi cartesiani):

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x = 0$$

(5) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. Poiché ha un autovalore nullo, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{II-2I}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.
Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1,2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In realtà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado ottenuta ha soluzioni in $\mathbf{C}$, ma non in $\mathbf{R}$:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-25}}{25} = \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{25}$$

A noi però interessa in realtà il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento DE e

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{-16}}{25} + \frac{3-\sqrt{-16}}{25}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{-16}+3-\sqrt{-16}}{25} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Quindi indipendentemente dal Δ, il valore di x_M viene comunque reale (e corretto).
In alternativa potevamo anche utilizzare le relazioni tra le radici e i coefficienti di una equazione di secondo grado. Infatti data l'equazione $ax^2+bx+c = 0$ sappiamo che $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$. Quindi data l'equazione

$$25x^2 - 6x + 1 = 0$$

otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{6}{25} \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare y_M, ricordando che M appartiene al segmento DE, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

$\square$

Esercizio 12.2 (13.5)**.** *Riconoscere che le seguenti coniche $f(x, y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

(2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

(3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$ e le matrici A' e A associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = 0$$

Poichè A' ha due righe uguali si ha $I_3 = \det(A') = 0$, quindi si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi si tratta conica degenere non a centro. Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro:

$$x^2 + (2y + 3)x + (y^2 + 3y) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2y-3 \pm \sqrt{(2y+3)^2 - 4(y^2+3y)}}{2} = \frac{-2y-3 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-2y-3 \pm 3}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = -y \qquad \text{oppure} \qquad x = -y-3 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali parallele:

$$r_1: \; x+y=0$$
$$r_2: \; x+y+3=0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3 = \det(A') = 0$ in quanto A' ha due righe uguali, quindi si tratta di una conica degenere.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita x con parametro y (o viceversa):

$$\begin{aligned} & x^2 - 2(3y-1) + (9y^2 - 6y + 1) = 0 \;\Rightarrow \\ & x_{1,2} = (3y-1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - (9y^2 - 6y + 1)} = 3y - 1 \end{aligned}$$

Quindi si tratta della retta $x - 3y + 1 = 0$ (conica doppiamente degenere, infatti $\text{rg}(A') = 1$).

(3) Consideriamo l'equazione $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Poichè $I_3 = \det(A') = 0$ si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) \neq 0$ quindi si tratta di una conica degenere a centro.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro (o viceversa):

$$x^2 + xy + (-2y^2 + 3y - 1) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(-2y^2 + 3y - 1)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{2} \\ &= \frac{-y \pm (3y-2)}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = y - 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -2y + 1 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali incidenti:

$$r_1: \; x - y + 1 = 0$$
$$r_2: \; x + 2y - 1 = 0$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ che corrisponde al centro della conica. Il punto C lo possiamo anche ricavare, come nei casi di coniche a centro non degeneri, risolvendo il sistema $A \cdot [x \; y]^T = -h$.

□

Esercizio 12.3 (13.6)**.** *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = 8\sqrt{2}(-40\sqrt{2}) + 38(25-9) = -640 + 608 = -32$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (5-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 2y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$8x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) = -25 \cdot 625 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (25-\lambda)(-7-\lambda)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$, disconcordi, e si tratta di un'iperbole.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 25x^2 - 7y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-25 \cdot 625 = -25 \cdot 7t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{625}{7}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$25x^2 - 7y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{25}x^2 - \frac{49}{625}y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{25}x^2 + \frac{49}{625}y^2 - 1 = 0$$

Per ottenere la forma canonica in questo caso dobbiamo effettuare la rotazione che manda x in y e y in $-x$::

$$\frac{49}{625}x^2 - \frac{7}{25}y^2 - 1 = 0$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = -3 \cdot 12 = -36 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, e si tratta di una parabola.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-36 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{36}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}} y = 0$$

□

Esercizio 12.4 (13.7). *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

SOLUZIONE:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Poiché $I_3 = \det(A') \neq 0$ è una conica non degenere.
Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori concordi $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, $I_2 > 0$ e si tratta di un'ellisse la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine la forma canonica cercata è:

$$8X^2 + 2Y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione R.

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \;\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 5II+3I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 16 & -24\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autovettori di A. Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II-I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle(-1,1)\rangle = \langle(1,-1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II+I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

dove (x_0, y_0) è il centro C della conica. Quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) - \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da (x,y) a (X,Y), nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.
Le matrici associate alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

$I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi è una conica non degenere.
Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$

Quindi A ha due autovalori discordi: $\lambda = 25$ e $\lambda = -7$, $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \dfrac{625}{7}$, per cui la forma canonica cercata è:

$$-7X^2 + 25Y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{49}{625}X^2 - \frac{7}{25}Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione R.

Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \ \frac{24}{7}\right)$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle = \langle (0,-1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -18 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1,0) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in effetti abbiamo solo effettuato la rotazione che scambia x e y in quando la conica di partenza non presentava il termine xy, quindi era già ruotata con gli assi paralleli agli assi cartesiani.

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ -X + \frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + \frac{24}{7} \\ x \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da (x, y) a (X, Y) nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha due autovalori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

Calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2 I \\ 2II + I \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(5) = \langle (1,2) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sfruttando l'invariante I_3 per cui $\det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ Infine possiamo la forma canonica cercata è:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}} y = 0$$

Dagli autovettori ricaviamo inoltre la matrice ortogonale speciale R di cambiamento di base:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per determinare la traslazione dobbiamo trovare il vertice, dato dal punto di intersezione tra l'asse e la parabola. Sappiamo che l'asse è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo e che $E(0) = (-2, 1)$. Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In realtà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle relazione tra i coefficienti e le soluzioni di una equazione di secondo grado otteniamo

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare y_M, ricordando che M appartiene al segmento DE, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

Infine le trasformazioni cercate sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{17}{75} \\ y - \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x + 2y - \frac{3}{5}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-2x + y + \frac{4}{15}\right) \end{bmatrix}$$

In realtà con la parabola ci può essere un problema: effettuando il cambio di variabile indicato non otteniamo l'equazione canonica determinata. Questo è dovuto al fatto che in realtà la rotazione corretta è:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

data dalla composizione della rotazione R precedentemente trovata con la rotazione

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che manda X in $-X$ e Y in $-Y$. Infatti la scelta della matrice di rotazione (ortogonale speciale) è sempre a meno del segno.

La trasformazione corretta che permette di passare dall'equazione iniziale alla forma canonica è:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X - Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 12.5 (13.8)**.** *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \ : \ 2xy - x - 3y = k$$

(1) *Stabilire per quali valori di k la conica $\mathcal{C}$ è degenere.*
(2) *Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.*
(3) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -k \end{bmatrix}$$

(1) Per stabilire se la conica è degenere calcoliamo il determinante di A':

$$I_3 = \det(A') = -\left(-k - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = k + \frac{3}{2}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è degenere se $k = -\dfrac{3}{2}$.

(2) Posto $k = 0$ calcoliamo il determinante della sottomatrice A

$$I_2 = \det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

(3) Per determinare il centro di $\mathcal{C}$ risolviamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & | & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Per determinare gli assi dobbiamo inoltre individuare la rotazione da effettuare per passare alla forma canonica. Calcoliamo quindi gli autospazi di A.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Quindi A ha due autovalori distinti: $\lambda = \pm 1$. Inoltre

$$E(1) = \langle \ (1, 1) \ \rangle$$
$$E(-1) = \langle \ (-1, 1) \ \rangle$$

I due autovettori indicano le direzioni degli assi della conica, quindi gli assi sono le due rette passanti per il centro C della conica e parallele a tali vettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ricavando le equazioni in forma cartesiana otteniamo:

$$a_1 : \ x - y = 1$$
$$a_2 : \ x + y = 2$$

□

Esercizio 12.6 (13.9)**.** *Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) *Esistono coniche degeneri nella famiglia?*
b) *Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di k.*
c) *Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).*

Soluzione:
Consideriamo le matrici associate a $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 2k & k-2 & 1 \\ k-2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2k & k-2 \\ k-2 & -4 \end{bmatrix}$$

a) $I_3 = \det(A') = k^2 + 4k + 8 \neq 0$ per ogni valore di k, quindi non esistono coniche degeneri nella famiglia.
b) $I_2 = \det(A) = -(k+2)^2$, quindi
   – Se $k = -2$, $I_2 = \det(A) = 0$ e $\mathcal{C}_{-2}$ è una parabola.
   – Se $k \neq -2$, $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}_k$ è una iperbole.
c) Calcoliamo il centro C_k delle coniche $\mathcal{C}_k$ nel caso $k \neq -2$:

$$\begin{bmatrix} 2k & k-2 & | & -1 \\ k-2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Scambiando prima e seconda riga e prima e seconda colonna otteniamo:

$$\begin{bmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ k-2 & 2k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 4II + (k-2)I \end{matrix} \begin{bmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & | & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4y + (k-2)x = 0 \\ (k+2)^2 x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{(k+2)^2} \\ y = -\dfrac{k-2}{(k+2)^2} \end{cases}$$

□

Esercizio 12.7 (13.11)**.** *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.*

Soluzione:
Consideriamo le matrici A' e A associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$I_3 = \det(A') = -4\left(1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A') = 0$ se $\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 1$, cioè

$$\frac{k}{2} = 1 \ \Rightarrow\ k = 2$$
$$\frac{k}{2} = -1 \ \Rightarrow\ k = -2$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq \pm 2$. Inoltre:

$$I_2 = \det(A) = 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4}{4}$$

Quindi
- Se $-2 < k < 2$, si ha $I_2 = \det(A) > 0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k < -2$ o $k > 2$, si ha $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k = \pm 2$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k = \pm 2$, inoltre:
- Se $k = -2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$. Anche senza utilizzare la formula per risolvere l'equazione otteniamo:

$$(x-y)^2 = 4 \ \Rightarrow\ x - y = \pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1:\ x - y = 2, \qquad r_2:\ x - y = -2$$

- Se $k = 2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2 = 4 \ \Rightarrow\ x + y = \pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1:\ x + y = 2, \qquad r_2:\ x + y = -2$$

c) Abbiamo visto che $\mathcal{C}$ è un'ellisse se $-2 < k < 2$. Inoltre se per esempio $x = 0$ dall'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo $y = \pm 2$, quindi i punti $A(0,2)$ e $B(0,-2)$ appartengono ad ogni conica. Se una conica (non degenere) contiene un punto reale è necessariamente tutta reale. Quindi in particolare tutte le ellissi sono reali.

□

Esercizio 12.8 (13.13)**.** *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t\ :\ tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$
b) $\det(A) = t^2 + 2t - 1$, quindi:
- Se $t < -1 - \sqrt{2}$ o $t > -1 + \sqrt{2}$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
- Se $-1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}$ con $t \neq 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
- Se $t = -1 \pm \sqrt{2}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
- Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $2xy + 2y^2 - 2y = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti (infatti $\det(A) \neq 0$): $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$.

c) Calcoliamo gli autovalori di A per $t=-1$:

$$p_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-2$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda=\pm\sqrt{2}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}y^2+k=0\ \Rightarrow\ B=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3=\det(B)=\det(A)=1$ otteniamo $-2k=1$, quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{-1}$ è

$$\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}y^2-\frac{1}{2}=0\ \Rightarrow\ \mathcal{C}_{-1}:\quad 2\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}y^2-1=0$$

□

Esercizio 12.9 (13.14)**.** *Si consideri la matrice*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda)=(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda=-1,1,3$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1)=N(M-I):\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow E(1)=\langle(1,0,0)\rangle$$

$$E(3)=N(M-3I):\ \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow E(3)=\langle(0,1,1)\rangle$$

$$E(-1)=N(M+I):\ \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow E(-1)=\langle(0,-1,1)\rangle$$

b) Gli autovettori trovati, essendo relativi a autovalori distinti, sono già ortogonali tra loro. E' quindi sufficiente renderli di norma 1 per ottenere la matrice diagonalizzante ortogonale di rotazione:

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

c) $\det(A)=-3$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre l'autovalore della matrice $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ associata alla forma quadratica è $\lambda=1$ doppio. Si tratta quindi di un'ellisse e cerchiamo un'equazione del tipo $x^2+y^2+t=0$ a cui è associata la matrice

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & t\end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A)=\det(B)$ otteniamo $t=-3$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2+y^2-3=0\qquad\Rightarrow\qquad \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2-1=0$$

Notiamo che si tratta in realtà di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$.

□

Esercizio 12.10 (13.16)**.** *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}: \ 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

La matrice A' ha determinante non nullo, quindi si tratta di una conica non degenere; inoltre $\det(A) = -64 < 0$, quindi si tratta di un'iperbole.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 5 \\ 7 & -5 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow_{3II-7I} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 5 \\ 0 & -64 & -56 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro, di direzione parallela ai punti all'infinito della conica. L'equazione della conica in coordinate omogenee è $3X^2 + 14XY - 5Y^2 - 10XZ + 14YZ = 0$. Ponendo $Z = 0$ otteniamo l'equazione $3X^2 + 14XY - 5Y^2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\frac{X}{Y} = \frac{-7 \pm 8}{3}$$

cioè le due rette $x + 5y = 0$ e $3x - y = 0$. Infine gli asintoti (passanti per il centro) sono le rette

$$a_1: \ x + 5y - 4 = 0 \qquad a_2: \ 3x - y + 2 = 0$$

□

Esercizio 12.11 (13.17)**.** *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi la forma canonica della conica.*
c) *Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') = -4 \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi è una parabola.

b) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. La forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-4 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{4}{5\sqrt{5}} y = 0$$

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-2I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2, 1)\rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.

Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad D = (0, 0), \quad E = \left(-\frac{8}{25}, -\frac{16}{25}\right)$$

Infine il punto medio M del segmento DE è $M = \left(-\frac{4}{25}, -\frac{8}{25}\right)$.

L'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{25} - 2t \\ y = -\frac{8}{25} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x + 2y = -\frac{4}{5} \Rightarrow 5x + 10y = -4$$

□