CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 11 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 11.1 (10.7)**.** *Siano assegnati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v = (2, -1, 0, 1), \qquad w = (-1, 2, 0, 2)$$

a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
b) *Si determini la proiezione ortogonale di v su w.*
c) *Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.*

SOLUZIONE:

a) Se indichiamo con ϑ l'angolo (convesso) tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v, w)}{\| v \| \cdot \| w \|}$$

Poiché

$$(v, w) = -2 - 2 + 2 = -2, \quad \| v \| = \sqrt{6}, \quad \| w \| = \sqrt{9} = 3,$$

otteniamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3} = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

e

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right), \quad \text{con } 0 \leq \vartheta < \pi$$

b) La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.
Sappiamo già che $(v, w) = -2$, inoltre $(w, w) = \| w \|^2 = 3^2 = 9$, quindi

$$pr_w(v) = \frac{-2}{9} \cdot w = \left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right)$$

c) Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w (è comunque immediato verificarlo), quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} &v_1 = pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w \\ &v_2 = v - pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w \\ &v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right) \\ v_2 &= \left(\frac{16}{9},\ -\frac{5}{9},\ 0,\ \frac{13}{9}\right) \end{aligned}$$

□

Esercizio 11.2 (10.8)**.** *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v = (3, 4, -2), \qquad w = (2, 1, -1)$$

SOLUZIONE:

- La proiezione ortogonale di v su w è il vettore
$$pr_w(v) = \frac{(v,w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v,w)}{(w,w)} \cdot w$$
Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.
$$(v,w) = 12$$
$$(w,w) = 6$$
quindi
$$pr_w(v) = \frac{12}{6} \cdot w = (4,\ 2,\ -2)$$
- Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w , quindi possiamo prendere:
$$\begin{aligned} &v_1 = pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w \\ &v_2 = v - pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w \\ &v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$
Quindi
$$\begin{aligned} v_1 &= (4,\ 2,\ -2) \\ v_2 &= (-1,\ 2,\ 0) \end{aligned}$$

□

Esercizio 11.3 (10.11)**.** *Data la base*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1,0,1),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (1,0,1)\}$$
di $\mathbf{R}^3$*, si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da* $\mathcal{B}$*.*

Soluzione:

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$.

Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).
$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (-1,0,1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2,w_1)}{(w_1,w_1)} \cdot w_1 = (0,1,0) - 0 \cdot w_1 = (0,1,0) \\ w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3,w_1)}{(w_1,w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3,w_2)}{(w_2,w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1,0,1) - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_2 = (1,0,1) \end{aligned}$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:
$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ u_2 &= w_2 = (0,1,0) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$
Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono già ortogonali, quindi era sufficiente normalizzarli per ottenere a partire da essi una base ortonormale.

□

Esercizio 11.4 (10.14)**.** *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *(con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*
$$v_1 = (1,1,0,1),\ v_2 = (1,-2,0,0),\ v_3 = (1,0,-1,2).$$
a) *Trovare una base ortonormale di* W*.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di* W*.*

Soluzione:

a) Notiamo che l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di W in quanto i vettori sono linearmente indipendenti (la matrice associata ha rango 3). Per determinare una base ortonormale $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ dobbiamo utilizzare il metodo di Gram-Schmidt, costruendo prima una base $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due artogonali (non necessariamente di norma 1).

$$w_1 = v_1 = (1,1,0,1)$$

$$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (1,-2,0,0) - \frac{-1}{3} \cdot (1,1,0,1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Prima di procedere notiamo che dei vettori w_i ci interessa solo la direzione (in modo che siamo tra loro ortogonali), ma non la lunghezza. Quindi ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$w_2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) = (4,-5,0,1)$$

$$w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2$$

$$= (1,0,-1,2) - \frac{3}{3} \cdot (1,1,0,1) - \frac{6}{42} \cdot (4,-5,0,1) = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right)$$

Anche in questo caso ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$w_3 = -7 \cdot \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) = (4,2,7,-6)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right)$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right)$$

Infine una base ortonormale di W è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \right\}$$

b) Il complemento ortogonale $W^\perp$ è formato dai vettori di $\mathbf{R}^4$ ortogonali ai vettori di W, ovvero ortogonali agli elementi di una sua base, quindi

$$W^\perp = \{(x,y,z,w) \mid x+y+w=0,\ x-2y=0,\ x-z+2w=0\}$$

Risolviamo quindi il sistema omogeneo ottenuto:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ 3III - II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = -\frac{1}{3}t \\ z = \frac{4}{3}t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W^\perp) = \{\ (-2,-1,4,3)\ \}$$

$\square$

Esercizio 11.5 (10.15). *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,1,1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2.*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.*
c) *Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori v_1 e v_2.*

Soluzione:

a)

$$\| v_1 \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$
$$\| v_2 \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

b)

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{4}{3} \cdot (1,1,1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

c) Sia $\{u_1, u_2\}$ la base ortonormale cercata. La cosa più semplice per sfruttare i conti già fatti è considerare

$$u_1 = \frac{v_2}{\| v_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Quindi

$$w_2 = v_1 - (v_1, u_1) \cdot u_1 = v_1 - pr_{v_2}(v_1) = (1,2,1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Notiamo che w_2 è parallelo a $(-1, 2, -1)$, quindi

$$u_2 = \frac{(-1,2,-1)}{\| (-1,2,-1) \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Infine la base ortogonale cercata è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.6 (10.16)**.** *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Gli elementi di U sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $2x_1 + x_2 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \qquad\qquad \forall s, t \in \mathbf{R} \\ x_3 = s \end{cases}$$

Quindi

$$U = \langle\ (1, -2, 0),\ (0, 0, 1)\ \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di U è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right),\ (0,\ 0,\ 1) \right\}$$

□

Esercizio 11.7 (10.21)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare tale che*

$$T(1, -2, 1) = (2, 1),\ T(1, 0, 0) = (-1, 2),\ T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

a) *Che dimensione ha l'immagine di T?*
b) *Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$) del nucleo di T.*

Soluzione:

Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:

(1) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a T rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \{ \ (1,-2,1), \ (1,0,0), \ (0,1,0) \ \}$$
di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$, tenendo poi conto che i vettori ottenuti nello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ (in particolare il Nucleo) saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(2) Ricavare l'azione di T sugli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e determinare quindi la matrice $B = M(T)$ associata a T rispetto alle basi canoniche.

Consideriamo entrambi i metodi.

(1) Con il primo metodo consideriamo la matrice A associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$:
$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di A. Poichè A contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
di determinante $2 \neq 0$, la matrice A ha rango 2, quindi
$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2(-2t) - t = -5t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $N(T))$ è generato dal vettore $(-2,1,-5)_{\mathcal{B}}$, espresso però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica tale vettore corrisponde al vettore
$$-2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3 = (-1,-1,-2)$$

Infine
$$N(T) = \langle \ (-1,-1,-2) \ \rangle$$

Poichè il nucleo ha dimensione uno per determinarne una base ortonormale è sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:
$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \ \right) \right\}$$

(2) Con il secondo metodo ricaviamo invece la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$, calcolando le immagini di $e_1, \ e_2, \ e_3$. Poichè conosciamo già $T(e_1) = (-1,2)$ e $T(e_2) = (-1,0)$, dobbiamo solo ricavare $T(e_3)$. Sfruttando la linearità di T otteniamo:
$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(1,-2,1) - T(1,0,0) + 2T(0,1,0) \\ &= (2,1) - (-1,2) + 2(-1,0) = (1,-1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice B associata a T rispetto alle basi canoniche è
$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ II + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di B, quindi
$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a B

$$\begin{cases} -x-y+z=0 \\ -2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$N(T) = \langle\ (1,1,2)\ \rangle$$

Notiamo che in questo caso il generatore è già espresso rispetto alla base canonica, è quindi sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 11.8 (11.1)**.** [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Calcolare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori per le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice A calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot 2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda)-4] \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono i valori di λ per cui $p_A(\lambda)=0$, quindi

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{(doppio)}, \qquad \lambda_2 = 3$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = -1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2x+2y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R} \;\Rightarrow\; E(-1) = \langle (-1,1,0),\ (0,0,1) \rangle$$

  Poichè dalla teoria sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ci aspettavamo che l'autovalore $\lambda=-1$ avesse molteplicità geometrica 2.
- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y=0 \\ -4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \;\Rightarrow\; E(3) = \langle (1,1,0) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (-1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,1), \qquad v_3 = (1,1,0)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo A una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Inoltre, in questo caso, anche i due autovettori relativi allo stesso autovalore $\lambda = -1$ risultano ortogonali: $(v_1, v_2) = 0$. Per determinare la base ortonormale richiesta è quindi sufficiente normalizzare i tre vettori $v_1,\ v_2$ e v_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0,0,1) \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \end{aligned}$$

Ripetiamo ora l'esercizio con la matrice B. Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice B calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda) - 1] - 3\cdot 3(1-\lambda) = (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda) - 1 - 9] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono i valori di λ per cui $p_B(\lambda) = 0$, quindi

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -4$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = 1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\ E(1) = \langle (1,0,3) \rangle$$

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2II + 3I \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle (-3,-2,1) \rangle$$

- $\lambda = -4$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B + 4I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 5II + -3I \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-4) = \langle (-3,5,1) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (1,0,3), \qquad v_2 = (-3,-2,1), \qquad v_3 = (-3,5,1)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo B una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Per determinare la base ortonormale richiesta si tratta quindi di normalizzare i tre vettori $v_1,\ v_2$ e v_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{5}{\sqrt{35}},\ \frac{1}{\sqrt{35}}\right) \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$$

□

Esercizio 11.9 (11.2)**.** *Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale P^TAP sia diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Poichè entrambe le matrici A sono simmetriche, sappiamo dalla teoria che sono sicuramente diagonatizzabili. Si tratta di

(1) Determinare gli autovettori di A,
(2) Determinare una base ortonormale a partire dagli autovettori (linearmente indipendenti) di A,
(3) Scrivere la matrice P che ha per colonne gli elementi della base trovata.

La matrice P cosí determinata è diagonalizzante e ortogonale.

Consideriamo prima la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \ \Rightarrow\ $ autovalori: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$
- $\lambda = 2$. Consideriamo $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(2) = \langle\ (2,1)\ \rangle$$

- $\lambda = -3$. Consideriamo $A + 3I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(-3) = \langle\ (1,-2)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$v_1 = (2,1), \qquad v_2 = (1,-2) \qquad \Rightarrow$$
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \ \Rightarrow\ $ autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$

- $\lambda = 1$. Consideriamo $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (1,1,0)\ \rangle$$

- $\lambda = 3$. Consideriamo $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{2III+I}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(3) = \langle\ (-1,1,-2)\ \rangle$$

- $\lambda = 0$. Consideriamo $A - 0I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{III-I}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \langle\ (-1,1,1)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{array}{lcl} v_1 = (1,1,0) & & u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \\ v_2 = (-1,1,-2) & \Rightarrow & u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ v_3 = (-1,1,1) & & u_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array}$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 11.10 (11.3)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.*
b) *Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:

a) L'endomorfismo T é sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrico.
b) Calcoliamo gli autovalori di T:

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 1] = (4-\lambda)^2(6-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 6$$

Calcoliamo ora gli autospazi.

Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A-4I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{III+II} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow y-z=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=s \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle\, (1,0,0),\ (0,1,1)\,\rangle$$

Notiamo che, anche senza avere osservato che T è simmetrico, a questo punto possiamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto la molteplicità geometrica del suo unico autovalore doppio è 2.

Inoltre i due vettori presi come generatori sono tra loro ortogonali, è perciò sufficiente normalizzarli per ottenere una base ortonormale di $E(4)$:

$$\mathcal{B}(E(4)) = \left\{\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a $A-6I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{III-II} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle\, (0,-1,1)\,\rangle$$

Una base ortonormale di $E(6)$ è:

$$\mathcal{B}(E(6)) = \left\{\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

c) L'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{\ (1,0,0)\,,\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$

è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

□

Esercizio 11.11 (11.5)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (6-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda) - 2\cdot 2(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4) \\ &= -(\lambda-5)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda = 10, \qquad\qquad \lambda = 5 \quad \text{(doppio)}$$

Calcoliamo i due autospazi.

$E(10)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-10I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III-1/2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(10) = \langle\, (1,0,-2)\,\rangle$$

$E(5)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 5I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(5) = \langle\ (2,0,1),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{\ (1,0,-2),\ (2,0,1),\ (0,1,0)\ \}\,.$$

Notiamo che tali vettori sono già tra loro ortogonali, è quindi sufficiente normalizzarli. Una base ortonormale è quindi data dall'insieme

$$\left\{\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ (0,1,0)\ \right\}.$$

$\square$

Esercizio 11.12 (11.9)**.** *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x,y,z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in $\mathbf{R}$.*
b) *Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

a) Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.

Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(A): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - III \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi

– Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ b & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi

– Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
– Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è daigonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b, oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

b) Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0,1,-1),\ (1,0,0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I): \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ E(2) = \langle (0,1,1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ (1,0,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.13 (11.10)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ \ (1,1,1), \ (1,1,0), \ (1,0,1) \ \}$. T è un endomorfismo simmetrico?

Soluzione:

Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che A non sia simmetrica non implica che non lo sia T. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per comodità assegnamo un nome ai tre vettori della base $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,1,0), \qquad v_3 = (1,0,1)$$

Dalla matrice A ricaviamo le immagini degli elementi della base $\mathcal{B}$, ricordando però che tali elementi sono ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1,1) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = (2,3,-1)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= T(1,0,1) = (1,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Per calcolare le immagini della base canonica dobbiamo prima esprimere $e_1, \ e_2, \ e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo che data la semplicità dei calcoli non è necessario impostare e risolvere i tre sistemi associati alle equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$. E' infatti immediato ricavare che

$$\begin{aligned} e_3 &= (1,1,1) - (1,1,0) = v_1 - v_2 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\ e_2 &= (1,1,1) - (1,0,1) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}} \\ e_1 &= (1,1,0) - e_2 = v_2 - v_1 + v_3 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi sfruttando la linearità di T:

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_1) - T(v_2) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} - (2,3,-1)_{\mathcal{B}} = (0,-1,1)_{\mathcal{B}} = -v_2 + v_3 = (0,-1,1) \\ T(e_2) &= T(v_1) - T(v_3) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} - (1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)_{\mathcal{B}} = v_1 + 2v_2 - v_3 = (2,3,0) \\ T(e_1) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = (2,3,-1_{\mathcal{B}}) - (2,2,0)_{\mathcal{B}} + (1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,1,0)_{\mathcal{B}} = v_1 + v_2 = (2,2,1) \end{aligned}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poichè B non è simmetrica, anche non T è un endomorfismo simmetrico.

Notiamo che per calcolare B potevamo in alternativa usare la matrice di cambiamento di base. Indichiamo con P è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$, cioè $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori v_1, v_2 e v_3 (espressi rispetto alla base canonica).La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è la matrice inversa di P: $P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Poiché $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ e $B = M(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$ abbiamo la seguente relazione:

$$M(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \qquad \Rightarrow \qquad B = PAP^{-1}$$

□

Esercizio 11.14 (11.11)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{ \ (1,1,1), \ (1,1,0), \ (1,0,1) \ \}.$$

a) *T è un endomorfismo simmetrico?*
b) *T è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che A non sia simmetrica non implica che non lo sia T. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per fare questo possiamo procedere in due modi
(1) Ricavare le immagini di $e_1,\ e_2$ e e_3 utlizzando la matrice A, dopo avere espresso e_i rispetto a $\mathcal{B}$ e ricordando che i risultati ottenuti saranno ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$.
(2) Ricavare direttamente le immagini di $e_1,\ e_2$ e e_3 sfruttando la linearità di T.

Consideriamo entrambi i metodi
(1) Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e e_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -III \\ -II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \ \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow\ e_1 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \ \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow\ e_2 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \ \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow\ e_3 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}}$$

Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ per calcolare le imamgini di e_i, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_1 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (-2,2,1)_{\mathcal{B}} = -2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (1,0,-1) \\ T(e_2) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_2 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= (3,-1,-2)_{\mathcal{B}} = 3 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = (0,2,1) \\ T(e_3) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_3 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= (5,-4,-2)_{\mathcal{B}} = 5 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = (-1,1,3) \end{aligned}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) In alternativa possiamo ricavare direttamente le immagini di e_1 dalla matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, sfruttando la linearità di T. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (6,-3,-3)_{\mathcal{B}} \\ T(1,1,0) &= (1,1,-1)_{\mathcal{B}} \\ T(1,0,1) &= (3,-2,-1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Sfruttando la linearità di T:

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(1,1,1) - T(1,1,0) = (6,-3,-3)_{\mathcal{B}} + (-1,-1,1)_{\mathcal{B}} = (5,-4,-2)_{\mathcal{B}} \\ &= 5 \cdot (1,1,1) - 4 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (1,0,1) = (-1,1,3) \\ T(1,0,0) &= T(1,0,1) - T(0,0,1) = (3,-2,-1)_{\mathcal{B}} + (-5,4,2)_{\mathcal{B}} = (-2,2,1)_{\mathcal{B}} \\ &= -2 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,0,1) = (1,0,-1) \\ T(0,1,0) &= T(1,1,0) - T(0,1,0) = (1,1,-1)_{\mathcal{B}} + (2,-2,-1)_{\mathcal{B}} = (3,-1,-2)_{\mathcal{B}} \\ &= 3 \cdot (1,1,1) - 1 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (1,0,1) = (0,2,1) \end{aligned}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poichè B è simmetrica, anche T è un endomorfismo simmetrico.

b) T è sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrica.

□

Esercizio 11.15 (11.15)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo avente come autovettori i vettori* $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, *rispetto agli autovalori* $1,1,2$.

a) *Calcolare la matrice* A *che rappresenta* T *rispetto alla base canonica.*
b) T *è invertibile?*
c) T *è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Poiché v_1 è autovettore rispetto a $\lambda = 1$, otteniamo che $T(v_1) = v_1$. Analogamente $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$. Di conseguenza

$$T(v_1) = (1,1,0), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (0,0,2)$$

a) Dobbiamo trovare le immagini della base canonica. Notiamo che

$$\begin{aligned} e_3 &= v_3 \\ e_2 &= v_2 - v_3 \\ e_1 &= v_1 - e_2 = v_1 - v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Per la linearità di T otteniamo che

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_3) = (0,0,2) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_3) = (0,1,1) - (0,0,2) = (0,1,-1) \\ T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,2) = (1,0,1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare A si poteva utilizzare la matrice diagonalizzante P che ha per colonne gli autovettori, e la matrice diagonale D che ha gli autovalori sulla diagonale. Dalla relazione $P^{-1}AP = D$ si ricava $A = PDP^{-1}$.

b) T è invertibile se lo è A. Poiché $\det(A) = -2 \neq 0$, A e T sono invertibili.

c) T non è simmetrico perché A, che è associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica, non lo è.

□

Esercizio 11.16 (11.13)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se T è invertibile.*
b) *Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) T è invertibile se è invertibile la matrice A, cioè se A ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

b) La matrice associata a T rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica: $A^T = A$, quindi T è un endomorfismo simmetrico.

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) - 3] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2,\ -1,\ 3$.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A - 2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ E(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A + I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\sqrt{3}III - II} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow\ E(-1) = \langle (0, 1, -\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A - 3I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{III + \sqrt{3}II} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow\ E(3) = \langle (0, \sqrt{3}, 1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$\square$