CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 9 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 9.1 (9.3)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

a) Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; A \cdot v = \lambda v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione $v \neq 0$ se e solo se il sistema omogeneo trovato ha soluzione non nulla. Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1, 3, 2$$

Consideriamo i tre casi

– Se $\lambda = 1$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 0, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 1:

$$T(t, 0, 0) = A \cdot (t, 0, 0) = (t, 0, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 1:

$$E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 3$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 2t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 3:

$$T(t, 2t, 0) = A \cdot (t, 2t, 0) = (3t, 6t, 0) = 3 \cdot (t, 2t, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 3:

$$E(3) = \langle (1, 2, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(0,0,t),\ t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 2:

$$T(0,0,t) = A \cdot (0,0,t) = (0,0,2t) = 2 \cdot (0,0,t).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 2:

$$E(2) = \langle (0,0,1) \rangle$$

b) T è diagonalizzabile se rispetto a una opportuna base ha associata una matrice diagonale, ovvero se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T. Prendiamo un autovettore relativo a ciascun autovalore:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (0,0,1)$$

e stabiliamo se sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice associata ai tre vettori:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, dunque T è diagonalizzabile. In realtà autovettori relativi ad autovalori differenti sono sempre linearmente indipendenti.

c) Abbiamo già determinato la base al punto precedente. Inoltre

$$\begin{array}{l} T(v_1) = v_1 \ \Rightarrow\ T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) = 3v_2 \ \Rightarrow\ T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) = 2v_3 \ \Rightarrow\ T(v_3) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} \end{array} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

□

Esercizio 9.2 (9.5)**.** [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Riconoscere che le due seguenti matrici M sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice P diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con D matrice diagonale; ricordiamo che P è una matrice le cui colonne sono autovettori di M).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \ \Rightarrow \ A \cdot v = \lambda v \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 3y + z \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = \lambda x \\ 3y + z = \lambda y \\ 4z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 3z = 0 \\ (3-\lambda)y + z = 0 \\ (4-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice ottenuta è quella associata al sistema omogeneo $(M - \lambda I)v = 0$. Quindi $T(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$ se e solo se v è soluzione non nulla del sistema omogeneo associato $M - \lambda I$ Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Quindi

$$\det(M - \lambda I) = 0 \ \Rightarrow \ \text{autovalori di } M\text{:} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

A questo punto possiamo già affermare che la matrice M è diagonalizzabile, in quanto ha 3 autovalori distinti, e di conseguenza 3 autovettori linearmente indipendenti. Per determinare la matrice P diagonalizzante dobbiamo trovare gli autospazi $E(\lambda_i)$ relativi ad ogni autovalore λ_i.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (1, 0, 0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0)$ e $E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (1, 1, 0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 1, 0) = \lambda \cdot (1, 1, 0) = 3 \cdot (1, 1, 0)$ e $E(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 4$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 4I$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, 1, 1\right) t,$$

Quindi $T(5, 3, 3) = \lambda \cdot (5, 3, 3) = 4 \cdot (5, 3, 3)$ e $E(4) = \langle (5, 3, 3) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (5, 3, 3)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T. La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale D è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) = v_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = 3 \cdot (1,1,0) = 3v_2 = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= T(5,3,3) = 4 \cdot (5,3,3) = 4v_3 = (0,0,4)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dai tre autovalori.

Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z, w)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Come nel caso precedente otteniamo che le soluzioni dell'equazione $T(v) = \lambda v$ sono le stesse soluzioni del sistema omogeneo associato a $M - \lambda I$; quindi $T(v) = \lambda v$ per qualche $v \neq 0$ se la matrice $M - \lambda I$ ha rango minore di 4 ovvero determinante nullo:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi

$$\det(M - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; \text{autovalori di } M\text{:} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \quad \text{(doppio)} \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

A questo punto non possiamo concludere nulla circa la diagonalizzabilità di M in quanto abbiamo trovato un autovalore doppio. In particolare se $E(2)$ ha dimensione 2 allora M è diagonalizzabile. Viceversa se $E(2)$ ha dimensione 1 allora M non è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 2I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1,0,0,0)t + (0,0,0,1)s \quad \forall t, s \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1,0,0,0) = \lambda \cdot (1,0,0,0) = 2 \cdot (1,0,0,0)$, $\quad T(0,0,0,1) = \lambda \cdot (0,0,0,1) = 2 \cdot (0,0,0,1)$ e $E(2) = \langle (1,0,0,0),\ (0,0,0,1) \rangle$.

Abbiamo così trovato che l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 2, uguale alla sua molteplicità algebrica. Di conseguenza M è diagonalizzabile in quanto ha sicuramente 4 autovettori linearmente indipendenti.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4z = 0 \\ 2x = 0 \\ -w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1,1,0,0)t, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1,1,0,0) = \lambda \cdot (1,1,0,0) = 3 \cdot (1,1,0,0)$ e $E(3) = \langle (1,1,0,0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 5$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 5I$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ -3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x, y, z, w) = (1, 2, 1, 0)\, t, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 2, 1, 0) = \lambda \cdot (1, 2, 1, 0) = 5 \cdot (1, 2, 1, 0)$ e $E(5) = \langle (1, 2, 1, 0) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 0, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (1, 2, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T. La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale D è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$T(v_1) = 2v_1 = (2, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_2) = 2v_2 = (0, 2, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = 3v_3 = (0, 0, 3, 0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_4) = 5v_4 = (0, 0, 0, 5)_{\mathcal{B}}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori.

□

Esercizio 9.3 (9.7)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

b) Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \ \Rightarrow\ (2-\lambda) = 0 \text{ oppure } (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$
$$\Rightarrow\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 3$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno). Di conseguenza esistono solamente due autovettori linearmente indipendenti e non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

Consideriamo ora la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda) + 6] - 1[-7(-\lambda-2) - 6] - [-42 + 6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1) - 1] \\ &= (\lambda-4)[-\lambda^2 - 4\lambda - 4] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di B sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda-4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda-4) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di B sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 4 \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio} \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ 1/6III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 7I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ (\lambda + 2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di C sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t - s, t, s) = (t, t, 0) + (-s, 0, s) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0), \ (-1, 0, 1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che C è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

□

Esercizio 9.4 (9.9)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima riga:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)[(-2 - \lambda)(5 - \lambda) + 12] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 1 \quad \text{singolo}$$

T è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -1/2II \\ 2III + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2y + 3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(s, -\frac{3}{2}t, t\right) \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(2) = \langle (1, 0, 0),\ (0, -3, 2) \rangle$$

Poiché $E(1)$ ha sicuramente dimensione 1, la somma delle dimensioni degli autospazi è $3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ e T è diagonalizzabile.

b) Per determinare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori dobbiamo determinare anche l'autospazio $E(1)$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -1/3II \\ 3III + 2II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0, -2t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(1) = \langle (0, -2, 1) \rangle$$

Infine la base di $\mathbf{R}^3$ cercata è

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0),\ (0, -3, 2),\ (0, -2, 1)\}$$

□

Esercizio 9.5 (9.12). *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di* T.
b) *Si stabilisca se* T *è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice* P *diagonalizzante.*
c) *Si determini una base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che la matrice associata a* T *rispetto a* $\mathcal{B}$ *sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.*

Soluzione:

Determiniamo innanzittutto la matrice A associata a T rispetto alla base canonica, ovvero la matrice che ha per colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Per calcolare gli autovalori di T (cioè di A) determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] \\ =& (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

Risolvendo $p_A(\lambda) = 0$ troviamo che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 1$$

b) Avendo 3 autovalori distinti la matrice A, e quindi T, è sicuramente diagonalizzabile. Per calcolare la matrice diagonalizzante dobbiamo determinare gli autospazi.

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (0, 3, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(2) = \langle (0, 3, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ \\ III - 1/3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (0, -1, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(-2) = \langle (0, -1, 1) \rangle$$

Consideriamo infine l'autovalore $\lambda = 1$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (-1, 1, 0) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(1) = \langle (-1, 1, 0) \rangle$.

La matrice P cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(0, 3, 1), \ (0, -1, 1), \ (-1, 1, 0)\}$$

Di conseguenza:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La base cercata è la base $\mathcal{B}$ di autovettori trovata al punto precedente. Inoltre la matrice D diagonale associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice $D = P^{-1}AP$ che ha sulla diagonale gli autovalori.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.6 (9.13)**.** [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice A e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(k - \lambda)(2 - \lambda)$$

Gli autovalori di A sono quindi

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 2$, allora A ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.

- Se $k = 1$ la matrice A diventa
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 2$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e A non è diagonalizzabile.
- Se $k = 2$ la matrice A diventa
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{doppio}$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 2$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1), e A è diagonalizzabile.

Consideriamo ora la matrice B e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$
Gli autovalori di B sono quindi
$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$
Poichè B ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica almeno 2, ma molteplicità geometrica 1, e B non è diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice C e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_C(\lambda) = (3-\lambda)(k-\lambda)(1-\lambda)$$
Gli autovalori di C sono
$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3, \qquad \lambda = k$$
Dobbiamo distinguere tre casi:
- Se $k \neq 1, 3$, allora C ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.

- Se $k=1$ la matrice C diventa
$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 3$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato a $C - I$:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, -2, 0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.
- Se $k=3$ la matrice C diventa
$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ed ha come autovalori
$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3 \quad \text{doppio}$$
Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 3$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $C - 3I$:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle\ (1, 0, 0)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

Consideriamo infine la matrice D e calcoliamone il polinomio caratteristico.
$$p_D(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$
Gli autovalori di D sono quindi
$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$
Poichè D ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $D - I$:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 0, 0),\ (0, 0, 1)\ \rangle$$
Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica 2.

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e l'autovalore $\lambda = k \neq 1$ ha molteplicità 1) quindi D è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3, ma molteplicità geometrica 2 quindi D non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 9.7 (9.16)**.** *Sia*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{\ 1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ \}$$

a) *Si determinino gli autovalori di* T*.*
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di* T*.*
c) *Si stabilisca se* T *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\,[(1-\lambda)(-1-\lambda)-3] = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$$

e gli autovalori di T sono

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -2$$

b) Calcoliamo ora gli autovettori.

– Consideriamo $\lambda = 1$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 1$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (-1,1,0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(-1,1,0)_{\mathcal{B}} = -1\cdot(1,1,0) + 1\cdot(0,3,0) + 0\cdot(0,1,1) = (-1,2,0)$$

e

$$E(1) = \langle\ (-1,2,0)\ \rangle$$

– Consideriamo $\lambda = 2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y+3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,3,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,3,1)_{\mathcal{B}} = 0\cdot(1,1,0) + 3\cdot(0,3,0) + 1\cdot(0,1,1) = (0,10,1)$$

e

$$E(2) = \langle\ (0,10,1)\ \rangle$$

– Consideriamo $\lambda = -2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ 1/3II \\ III-1/3I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,-1,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,-1,1)_{\mathcal{B}} = 0\cdot(1,1,0) + -1\cdot(0,3,0) + 1\cdot(0,1,1) = (0,-2,1)$$

e

$$E(-2) = \langle\ (0,-2,1)\ \rangle$$

c) La matrice A, e quindi l'applicazione T, è diagonalizzabile perchè ha tre autovalori distinti.

□

Esercizio 9.8 (9.17)**.** *Sia* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ *una base di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* S *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *con matrice associata rispetto a* $\mathcal{B}$

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Trovare gli autovalori (reali) di* S.
b) *Trovare gli autovettori di* S *e stabilire se* S *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Gli autovalori di T non dipendono dalla base, quindi possiamo lavorare sulla matrice A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 49)$$

Quindi S ha due autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 7$.

b) Trovare gli autovettori di S possiamo comunque lavorare sulla matrice A ricordando però che i vettori trovati saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$E(1) = N(A-I): \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 5 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II - 1/2I \\ 1/3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 9 & -9 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/9II \\ 1/6III + 1/9II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E(1)$ è generato dal vettore $(0,1,1)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $v_2 + v_3 = (2,2,1)$. Infine $E(1) = \langle (2,2,1) \rangle$.

Analogamente:

$$E(7) = N(A-7I): \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + 1/2I \\ 1/3III + 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E(7)$ è generato dal vettore $(1,1,0)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $v_1 + v_2 = (2,1,0)$. Infine $E(7) = \langle (2,1,0) \rangle$.

S non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 7$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

□

Esercizio 9.9 (9.22)**.** *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di* M *al variare del parametro* $k \in \mathbf{R}$.
b) *Per* $k = 2$, *si determini una base di* $\mathbf{R}^4$ *formata da autovettori di* M.

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di M è

$$p_M(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ k$ e dobbiamo discutere i valori di k.

– Se $k \neq 1, 2, 3$ i quattro autovalori sono distinti e singoli, quindi M è diagonalizzabile.
– Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $\mathrm{rg}(M - I) = 3$, $\dim(E(1)) = 1$ e M non è diagonalizzabile.
– Se $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(2) = N(M - 2I) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + 4z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \\ w = 2s + 4t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (-1, 0, 1, 4),\ (0, 1, 0, 2) \rangle$$

Poiché $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli, per $k = 2$ la matrice M è diagonalizzabile.
– Se $k = 3$ l'autovalore $\lambda = 3$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè $\mathrm{rg}(M - 3I) = 3$, $\dim(E(3)) = 1$ e M non è diagonalizzabile.

b) Per $k = 2$ abbiamo già determinato $E(2)$. Calcoliamo gli altri due autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + I \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + 4z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (2, 2, 0, 1) \rangle$$

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B} = \{\ (-1, 0, 1, 4),\ (0, 1, 0, 2),\ (0, 0, 0, 1),\ (2, 2, 0, 1)\}$$

$\square$

Esercizio 9.10 (9.23 e 9.26)**.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.*
b) *Stabilire per quali valori di k le due matrici A e B sono simili.*
c) *Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi B ha due autovalori: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, doppio, ed è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ k & 0 & 0 & | & 0 \\ 5 & k-2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-2)y = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi.

– Se $k \neq 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 1 e B non è diagonalizzabile.

– Se $k = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e B è diagonalizzabile.

b) Due matrici diagonalizzabili sono simili sse hanno gli stessi autovalori (contati con le rispettiva molteplicità). Studiamo quindi la diagonalizzabilità di A.

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Come la matrice B, anche A è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e A è diagonalizzabile.

In conclusione A e B sono simili quando sono entrambe diagonalizzabili, ovvero se $k = 2$

c) Dai punti precedenti sappiamo che per $k = 3$ la matrice B non è diagonalizzabile, mentre la matrice A è diagonalizzabile. Di conseguenza le matrici A e B non possono essere associate allo stesso endomorfismo.

$\square$

Esercizio 9.11 (9.32)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a+kb)x^2 + (ka+b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*

b) *Calcolare gli autovalori di T.*

Soluzione:

Notiamo che il generico polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ ha componenti (a, b, c) rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$. In particolare $p(x) = x^2$ ha componenti $(1, 0, 0)$, $p(x) = x$ ha componenti $(0, 1, 0)$ e $p(x) = 1$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In sostanza la base $\{x^2, x, 1\}$ corrisponde quindi alla base canonica. Inoltre T può essere vista come applicazione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(a, b, c) = (a + kb,\ ka + b,\ kc).$$

a) Calcoliamo la immagini degli elementi della base:

$$T(x^2) = T(1, 0, 0) = (1, k, 0) = x^2 + kx$$
$$T(x) = T(0, 1, 0) = (k, 1, 0) = kx^2 + x$$
$$T(1) = T(0, 0, 1) = (0, 0, k) = k$$

Di conseguenza la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (k - \lambda)\left[(1 - \lambda)^2 - k^2\right] = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k)$$

Di conseguenza gli autovalori (non sempre distinti) sono

$$\lambda = k, \qquad \lambda = 1 - k, \qquad \lambda = 1 + k$$

□