CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 8 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 8.1 (8.40)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1, 0),\ (1, 1)\ \}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ due basi di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

La matrice A cercata ha per colonne le immagini attraverso T degli elementi di $\mathcal{B}$, espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Cominciamo a calcolare la immagini:

$$T(1, 0) = (2, 1, 0), \qquad T(1, 1) = (2, 0, 2)$$

I vettori cosí ottenuti sono però espressi rispetto alla base canonica. Indichiamo con

$$u_1' = (1, 1, 0),\ u_2' = (0, 1, 1),\ u_3' = (0, 0, 2)$$

gli elementi della base $\mathcal{B}'$. Esprimere $(2, 1, 0)$ e $(2, 0, 2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le due equazioni vettoriali: $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2, 1, 0)$ e $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2, 0, 2)$. Consideriamo quindi la matrice associata a tali sistemi, riducendola con le due colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Per risolvere l'equazione $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2, 1, 0)$ consideriamo la prima colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1, 0) = (2, 1, 0) = 2u_1' - u_2' + \frac{1}{2}u_3' = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Analogamente per risolvere l'equazione $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2, 0, 2)$ consideriamo la seconda colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1, 1) = (2, 0, 2) = 2u_1' - 2u_2' + 2u_3' = (2, -2, 2)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.2 (8.41)**.** *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ rispettivamente la base canonica e un'altra base di V.*

a) *Determinare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$.*
b) *Svolgere l'esercizio precedente utilizzando la matrice P.*

Soluzione:

a) La matrice P cercata ha per colonne gli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Esprimere gli elementi di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le tre equazioni vettoriali $x \cdot (1, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 1) + z \cdot (0, 0, 2) = e_i$,

$i = 1, 2, 3$. Riduciamo perciò a gradini la matrice formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ con le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Per esprimere e_1 otteniamo il sistema relativo alla prima colonna:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_2 otteniamo il sistema relativo alla seconda colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_3 otteniamo il sistema relativo alla terza colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che per calcolare $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ potevamo in alternativa calcolare e poi invertire la matrice di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$. Infatti $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}$ ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}'$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice P cercata è l'inversa di tale matrice:

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Nell'esercizio precedente avevamo calcolato

$$T(1, 0) = (2, 1, 0), \qquad T(1, 1) = (2, 0, 2)$$

e dovevamo esprimerli rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Avendo ora calcolato la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$, possiamo utilizzare P per calcolare le coordinate cercate:

$$P \cdot (2, 1, 0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2, 1, 0) = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

$$P \cdot (2, 0, 2)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (2, 0, 2) = (2, -2, 2)_{\mathcal{B}'}$$

La matrice cercata è quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 8.3 (8.55)**.** *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (1,0,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.*

b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base canonica. Calcoliamo quindi le immagini dei vettori v_i, utilizzando la matrice $M(T)$:

$$M(T) \cdot v_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \ T(v_1) = (1,0,4)$$

$$M(T) \cdot v_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \ T(v_2) = (4,1,5)$$

$$M(T) \cdot v_3^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \ T(v_3) = (4,0,3)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi esprimere rispetto alla base $\mathcal{B}$ i vettori $T(v_i)$, trovati al punto precedente. Si tratta di risolvere i tre sistemi $xv_i + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per comodità riduciamo a gradini i tre sistemi contemporaneamente, affiancando direttamente le tre colonne dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} I - III \\ II - I \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \ \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -z = -1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_1) = -3v_1 + 3v_2 + v_3 = (-3,3,1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \ \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -z = -3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_2) = -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = (-1,2,3)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \ \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -z = -4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_3) = v_1 - v_2 + 4v_3 = (1,-1,4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che per calcolare $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ potevamo anche utilizzare le matrici di cambiamento di base. Sia infatti $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$; P ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{E}$:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre la matrice di transizione dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{C}$ è l'inversa di P:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = P^{-1} \cdot M(T) \cdot P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 8.4 (8.49)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,1,2)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) Basta verificare che la matrice formata dai tre vettori ha rango 3, ovvero determinante diverso da zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 2 \neq 0$$

Quindi v_1, v_2 e v_3 sono lineramente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Come nell'esercizio precedente si può procedere in due modi. Utilizziamo il primo.

Calcoliamo le immagini dei vettori v_i della nuova base:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= A \cdot v_1 = (-2, -2, 0) \\ T(v_2) &= A \cdot v_2 = (2, 0, -2) \\ T(v_3) &= A \cdot v_3 = (4, 4, 8) \end{aligned}$$

Si tratta ora di esprimere i vettori trovati rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo però come la cosa è immediata:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1,0) = (-2,-2,0) = -2v_1 && \Rightarrow T(v_1) = (-2,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= T(-1,0,1) = (2,0,-2) = -2v_2 && \Rightarrow T(v_2) = (0,-2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= T(1,1,2) = (4,4,8) = 4v_3 && \Rightarrow T(v_3) = (0,0,4)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che volendo utilizzare il secondo metodo la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ottenuta è diagonale, la matrice di transizione P tale che $P^{-1}AP = M_{\mathcal{B}}(T)$ è detta diagonalizzante.

□

Esercizio 8.5 (9.1)**.** *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Soluzione:

Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1,0,0,1) = (2,\ -1+1,\ 0,\ 1+1) = (2,\ 0,\ 0,\ 2) = 2 \cdot v$$

Quindi v è autovettore associato all'autovalore 2.

□

Esercizio 8.6 (9.2)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x,\ y+3z,\ x+y-z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1 = (0,3,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

a) Calcoliamo le immagini dei vettori v_i:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(0,3,1) = (0,6,2) = 2v_1, \\ T(v_2) &= T(0,-1,1) = (0,2,-2) = -2v_2, \\ T(v_3) &= T(-1,1,0) = (-1,1,0) = v_3 \end{aligned}$$

quindi v_1 è autovettore rispetto all'autovalore 2, v_2 è autovettore rispetto all'autovalore -2, v_3 è autovettore rispetto all'autovalore 1.

b) Verifichiamo che la matrice associata ai tre vettori $v_1,\ v_2$ e v_3 ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot (3+1) \neq 0$$

I tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Abbiamo già visto che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono autovettori, quindi:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2v_1 = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_1) &= (2,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= -2v_2 = 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_2) &= (0,-2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_3) &= (0,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

e la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$D = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

d) Utilizzando il metodo della matrice di transizione per determinare la matrice D, sappiamo che la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$).

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice D associata a T rispetto alla nuova base è $D = P^{-1}AP$. La matrice

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è quindi la matrice diagonalizzante cercata.

$\square$