**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA**

FOGLIO DI ESERCIZI 7 – GEOMETRIA 2009/10

**Esercizio 7.1** (8.8)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che* $T(v) = Av$ *con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di* $T$*.*
b) *Stabilire se* $(-3, 2, 1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$*.*

SOLUZIONE:

a)

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ A \cdot v \mid v \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Sia quindi $v = (x, y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, l'immmagine di $T$ è formata dai vettori

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{bmatrix} = (1, 2, 1) \cdot x + (1, 0, -1)y$$

In sostanza $\mathrm{Im}(T)$ è lo spazio generato dalle colonne di $A$:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (1, 2, 1),\ (1, 0, -1) \rangle$$

Riduciamo perciò $A$ a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $A$ ha rango 2 e le due colonne sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, -1)\}$$

Analogamente il nucleo di $T$ è

$$\mathrm{N}(T)) = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \mid A \cdot v = 0 \right\}$$

Sia quindi $v = (x, y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, il nucleo di $T$ è formato dalle soluzioni di

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

In sostanza il nucleo di $T$ è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $A$. Usando la matrice ridotta è immediato vedere che l'unica soluzione è il vettore nullo $(0, 0)$, quindi $\mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

b) Il vettore $w = (-3, 2, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se appartiene allo spazio generato dalle colonne di $A$, ovvero se ammette soluzione il sistema $Ax = w$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

Il sistema non ammette soluzione, quindi $w = (-3, 2, 1)$ non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

---

Notiamo che

- Nucleo di $T$: corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato a $A$.
- Immagine di $T$: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di $A$.
- $w$ appartiene all'immagine di $T$ se il sistema $A|w$ ha soluzione, cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

---

□

**Esercizio 7.2** (8.7)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita sulla base canonica di* $\mathbf{R}^2$ *nel seguente modo:* $T(e_1) = (1, 2, 1),\ T(e_2) = (1, 0, -1)$*.*

a) *Esplicitare* $T(x, y)$*.*
b) *Determinare la matrice* $A$ *associata a* $T$ *(rispetto alle basi canoniche).*

c) *Stabilire se* $(3,4,1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di $T$:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1,2,1) + y \cdot (1,0,-1) = (x + y,\ 2x,\ x - y)$$

b) La matrice associata a $A$ è la matrice che ha per colonne le immagini della base canonica di $\mathbf{R}^2$ (espresse rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$). Avendo già $T(e_1)$ e $T(e_2)$ è immediato ricavare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Il vettore $w = (3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tale che $T(x, y) = w$, ovvero se $(x + y, 2x, x - y) = (3,4,1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ (3,4,1) = T(2,1) \in \mathrm{Im}(T)$$

Utilizzando la matrice associata al sistema, $w$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

---

In generale $w$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

---

□

**Esercizio 7.3** (8.6)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.

a) *Verificare che* $T$ *è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di* $T$.
c) *Determinare la matrice* $A$ *associata a* $T$ *(rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare* $T(1,2)$ *usando la definizione e usando la matrice* $A$.

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbf{R}^2$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ T(v_1) + T(v_2) &= (x_1 + y_1, 2x_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, 2x_2, x_2 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \\ \lambda T(v) &= \lambda(x + y, 2x, x - y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \end{aligned}$$

Anche la seconda proprietà è verificata, quindi $T$ è lineare.

b) Per definizione

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \mid T(v) = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + y, 2x, x - y) = (0,0,0) \right\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T) &= \left\{T(v) \mid v \in \mathbf{R}^2\right\} \subseteq \mathbf{R}^3 \\ &= \{(x+y, 2x, x-y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(1,2,1)x + (1,0,-1)y \mid x, y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle (1,2,1),\ (1,0,-1)\rangle\end{aligned}$$

A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\ II-2I\\ III-I\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\\ \\ III-II\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Quindi la matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}.$$

c) La matrice $A$ ha per colonne le immagini dei vettori della base di $\mathbf{R}^2$ espressi come combianzione lineare degli elementi della base di $\mathbf{R}^3$. Nel caso in cui le basi siano quelle canoniche la cosa è immediata:

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,1), \qquad T(e_2) = T(0,1) = (1,0,-1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Notiamo che al punto b) abbiamo in sostanza trovato:

---

- Nucleo di $T$: corrisponde alle soluzioni del sistema omogeneo associato a $A$.
- Immagine di $T$: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di $A$.

---

d) Con la definizione di $T$:

$$T(1,2) = (1+2, 2\cdot 1, 1-2) = (3,2,-1)$$

Con la matrice $A$

$$T(1,2) = A \cdot (1,2)^T = (3,2,-1)$$

□

**Esercizio 7.4** (8.9)**.** *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

*Determinare l'immagine attraverso $T$ del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.*

SOLUZIONE:

Il piano $\pi$ ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t\\ y = t\\ z = s\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi = \{(x,y,z) = (-2t, t, s) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x,y,z) = (-2t, t, s)$ di $\pi$ è quindi data da

$$T(x,y,z) = A \cdot (x,y,z) = \begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2t\\ t\\ s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7t\\ -5t\\ 2t+s\end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t+s).$$

Infine l'immagine di $\pi$ è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \\ z = 2t + s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, \qquad \Rightarrow \qquad T(\pi): \quad 5x + 7y = 0$$

□

**Esercizio 7.5** (8.11)**.** *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ *la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

*rispetto alle basi canoniche.*

a) *Trovare una base del nucleo* N(T) *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$*.*
b) *Dire se* $T$ *è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *il vettore* $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ *appartiene all'immagine di* $T$*?*

Soluzione:

Ricordiamo che $\mathrm{Im}(T)$ è generata da

$$T(e_1) = (1,1,0,0,-1), \qquad T(e_2) = (-1,1,1,1,-1)$$
$$T(e_3) = (0,0,0,3,0), \qquad T(e_4) = (0,0,0,0,0)$$

Quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(T)$ equivale al rango della matrice associata a tali vettori.

Inoltre $v_k$ appartiene all'immagine di $T$ se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle$.

Per rispondere a tutte le tre domande riduciamo a gradini la matrice associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV - III \\ V + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$2III - II \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(1,1,0,0,-2),\ (-1,1,1,1,0),\ (0,0,0,3,0)\} \end{aligned}$$

Inoltre dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\mathrm{N(T)}) + \dim(\mathrm{Im(T)}) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N(T)}) = 4 - \dim(\mathrm{Im(T)}) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\mathrm{N(T)})$ notiamo che

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathrm{N(T)}$$
$$\text{sse}$$
$$T(v) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) + x_4T(e_4) = 0$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice ridotta precedentemente a gradini:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N(T)}) = \{\ (0,0,0,1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbf{R}^5) \ \Rightarrow \quad T \text{ non è suriettiva} \\ &\dim(\mathrm{N(T)}) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \quad T \text{ non è iniettiva} \end{aligned}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema impostato all'inizio è compatibile. Dalla terza riga della matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$v_0 = T(1,1,1,t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

**Esercizio 7.6** (8.30). *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se $T$  invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di $T$.*

Soluzione:

a) $T$  invertibile se è biiettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice $A$ ha rango 4. In sostanza $T$ è invertibile se e solo se lo è $A$.

Riduciamo a gradini la matrice $A$:

$$\begin{array}{c} \\ 1/2II + I \\ III + 1/2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A$ ha rango 3 quindi $T$ non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\mathrm{rg}(A) < 4$ in quanto $A$ ha la quarta colonna multipla della terza.

Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di $A$ (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduzione ci serviva comunque per il punto successivo.

b) Poichè le prime tre colonne di $A$ contengono un pivot, ne segue che

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,-2,1,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,0,0,-1)\}$$

Per determinare il nucleo di $T$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $A$:

$$\begin{cases} x - z + w = 0 \\ y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$

Quindi

$$\mathcal{B}\left(N(T)\right) = \{\ (0,0,1,1)\ \}$$

$\square$

**Esercizio 7.7** (8.32)**.** *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale $k$ per i quali $T$ è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di $k$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni $k$

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

$\square$

**Esercizio 7.8** (8.17)**.**

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

*definiscono un'unica applicazione lineare $T$ da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.*
b) *Scrivere la matrice rappresentativa di $T$ rispetto alla basi canoniche.*
c) *Trovare basi di $\mathrm{Im}(T)$ e di $N(T)$.*

Soluzione:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di $\mathbf{R}^3$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi $e_i$ della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1,2,3$, dobbiamo esprimere ogni $e_i$ come combinazione lineare dei vettori $v_i$. Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_3 = v_1 - v_3, \qquad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di $T$ ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2)\\
T(e_3) &= T(v_1) - T(v_3) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (-1,2) - (2,1) = (-3,1)\\
T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0,1,1) - T(1,1,1) + T(1,1,0)\\
&= (0,4) - (-1,2) + (2,1) = (3,3)
\end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$\begin{array}{c} \\ II-2I \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1) = (-1,-2),\ T(e_2) = (3,3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a $A$:

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1\right) \right\}$$

□

**Esercizio 7.9** (8.36)**.** *Sia* $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* $S$ *e una base dell'immagine di* $S$*.*
b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1)$$

*Si determini la matrice* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ *associata a* $S$*.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice $A$ associata a $S$ rispetto alle basi canoniche calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{c} S(e_1) = (3,4,1) \\ S(e_2) = (0,-2,0) \\ S(e_3) = (-2,2,2) \\ S(e_4) = (1,3,2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = M(S) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice $A$:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-4I \\ III-3I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di $S$ è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 0 \\ -2y - 6z - 5w = 0 \\ -8z - 5w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5}t \\ y = t \\ z = t \\ w = -\dfrac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(6,5,5,-8)\}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a $S$ rispetto alla basecanonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ ha per colonne la immagini $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)$ espresse però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Avendo già calcolato tali immagini, si tratta ora di esprimere $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3),\ S(e_4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1+yv_2+zv_3 = S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III - I \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1) = (-3,2,4)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2) = (2,0,-2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3) = (0,-4,2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4) = (-1,-1,3)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 7.10** (8.44)**.** *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

*rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.*

a) *Si scriva la matrice associata a $S$ rispetto alle basi canoniche.*
b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) La matrice cercata ha per colonne $S(e_1),\ S(e_2)$ e $S(e_3)$. Per determinare tali immagini possiamo procedere in due modi.

Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e $e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,2,2)$ e $v_3 = (0,0,3)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In realtà la matrice è già ridotta (triangolare superiore), quindi possiamo risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ per calcolare le imamgini di $e_i$, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned}
S(e_1) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (0,0,0)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0) \\
S(e_2) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 - \frac{1}{3} \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\
S(e_3) = M_{\mathcal{B}}(S) \cdot e_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)
\end{aligned}$$

Infine

$$A = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consiste nel ricavare direttamente le immagini di $e_1$ dalla matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$, sfruttando la linearità di $S$. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi

$$S(1,1,1) = (0,0,1)_{\mathcal{B}}, \qquad S(0,2,2) = (0,0,2)_{\mathcal{B}}, \qquad S(0,0,3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}}$$

Ricaviamo $e_1$, $e_2$ e $e_3$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
(0,0,1) &= \frac{1}{3}(0,0,3) \\
(0,1,0) &= \frac{1}{2}(0,2,2) - \frac{1}{3}(0,0,3) \\
(1,0,0) &= (1,1,1) - \frac{1}{2}(0,2,2)
\end{aligned}$$

Per la linearità di $S$ otteniamo quindi:

$$S(0,0,1) = \frac{1}{3}(0,1,3)_{\mathcal{B}} = \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$S(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,0,2)_{\mathcal{B}} - \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)_{\mathcal{B}} = \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 - \frac{1}{3} \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$S(1,0,0) = (0,0,1)_{\mathcal{B}} - \frac{1}{2}(0,0,2)_{\mathcal{B}} = (0,0,0)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0)$$

Infine

$$S(e_1) = (0,0,0), \qquad S(e_2) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \qquad S(e_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

e la matrice associata a $S$ rispetto alla base canonica è:

$$A = M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

b) Conviene utilizare la matrice $A$ in modo da ottenere vettori già espressi rispetto alla base canonica. Riduciamo $A$ a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 3II \\ 3III \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (0,-2,-2),\ (0,2,11)\ \}$$

Per ricavare il nucleo di $S$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $A$

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{\ (1,0,0)\ \}$$

□

**Esercizio 7.11** (8.50)**.** *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$

*una base di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $T$ *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *così definito:*

$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* $T$ *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di* $T$*.*
c) *Si stabilisca per quali valori di* $k$ *il vettore* $v_k = (k+1, 0, k)$ *appartiene all'Immagine di* $T$*.*

Soluzione:

a) Per determinare $T(e_i)$, dobbiamo ricavare le coordinate di $e_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Non è però necessario risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ in quanto seplicemente:

$$e_1 = \frac{1}{2}v_3, \qquad e_2 = -v_2, \qquad e_3 = v_1 - \frac{1}{2}v_3$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \frac{1}{2}T(v_3) = (3,2,3) \\ T(e_2) &= -T(v_2) = (0,-1,-1) \\ T(e_3) &= T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_3) = (3,1,2) - (3,2,3) = (0,-1,-1) \end{aligned}$$

e

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini

$$\begin{array}{c} 1/3I \\ II - 2/3I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M(T)) = 2$$
$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(3,2,3),\ (0,-1,-1)\}$$

Sappiamo già che $\dim(\text{N(T)}) = 3 - \text{rg(M(T))} = 1$. Per determinarne una base risolviamo il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\text{N(T)}) = \{(0,-1,1)\}$$

c) Il vettore $v_k = (k+1, 0, k)$ appartiene all'Immagine di $T$ se è combinazione lineare dei vettori della base in $\text{Im}(T)$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & | & k+1 \\ 2 & -1 & | & 0 \\ 3 & -1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & | & k+1 \\ 0 & -3 & | & -2k-2 \\ 0 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -2k+1 \end{bmatrix}$$

Infine, se $k = \frac{1}{2}$ la matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango, quindi il sistema ammette soluzione e $v_k$ appartiene a $\text{Im}(T)$, mentre se $k \neq \frac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A|b) = 3 > \text{rg}(A) = 2$, quindi il sistema non ammette soluzione e $v_k$ non appartiene a $\text{Im}(T)$.

□

**Esercizio 7.12** (8.53)**.** *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) *Si calcoli la matrice associata a $T$ rispetto ad $\mathcal{E}$.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di $T$ e stabilire se $T$ è invertibile.*

Soluzione:
Dalla definizione otteniamo

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (3,-1,1) \\ T(e_2) &= (0,1,-1) \\ T(e_3) &= 2T(e_1) + T(e_2) = (6,-2,2) + (0,1,-1) = (6,-1,1) \end{aligned}$$

a) La matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo $T$ a gradini

$$\begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza una base dell'immagine di $T$ è $\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(3,-1,1),\ (0,1,-1)\}$.
Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeno associato a $T$:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

e una base del nucle di $T$ è $\mathcal{B}(\text{N(T)}) = \{(-2,-1,1)\}$.

b) Dai conti svolti nel punto precedente vediamo che $A$ ha rango 2, quindi non è invertibile. Altrettanto l'endomorfismo $T$ non è invertibile.

□

**Esercizio 7.13** (8.56)**.** *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A - A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di $S$.*

b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a $S$ rispetto alla base*
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUZIONE:

a) Per definizione
$$N(S) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = A^T\} = \{\text{ matrici simmetriche di } M_n(\mathbf{R})\}$$
Provando a calcolare $S(A)$ per qualche $A$ si vede che le matrici $S(A) = B = [b_{i,j}]$ ottenute hanno necessariamente tutti zero sulla diagonale e hanno $b_{i,j} = -b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$. Quindi:
$$\mathrm{Im}(S) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = -A^T\} = \{\text{ matrici antisimmetriche di } M_n(\mathbf{R})\}$$

b) Sia
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
La matrice associata a $S$ rispetto a $\mathcal{B}$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse rispetto a $\mathcal{B}$:
$$\begin{aligned}
S(A_1) &= A_1 - A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_2) &= A_2 - A_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2 - A_3 = (0,1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_3) &= A_3 - A_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A_2 + A_3 = (0,-1,1,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_4) &= A_4 - A_4^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$
Quindi
$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 7.14** (8.58)**.** *Si $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ l'applicazione lineare definita ponendo*
$$f(ax^2 + bx + c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + a - c$$

a) *Si trovi la matrice rappresentativa di tale applicazione rispetto alla base*
$$\mathcal{B} = \{x^2 + 2, \ x - 1, \ x + 1\}$$

b) *Si trovi la dimensione e una base di* N(f) *e* $\mathrm{Im}(f)$*.*

SOLUZIONE:

Ricordiamo che a ogni polinomio $ax^2+bx+c$ di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti $(a,b,c)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$, ovvero a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ associamo un vettore di $\mathbf{R}^3$. Di conseguenza ai polinomi di $\mathcal{B}$ possiamo associamo i tre vettori
$$p_1 = (1,0,2), \quad p_2 = (0,1,-1), \quad p_3 = (0,1,1)$$
che formano una base di $\mathbf{R}^3$.

Analogamente possiamo considerare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che
$$f(a,b,c) = (a-b, \ b-c, \ a-c)$$

a) Calcoliamo l'immagine di $p_1, \ p_2, \ p_3$ che poi dovremo esprimere come combinazione lineare di $p_1, \ p_2, \ p_3$.
$$\begin{aligned}
f(p_1) &= f(1,0,2) = (1,-2,-1) \\
f(p_2) &= f(0,1,-1) = (-1,2,1) \\
f(p_3) &= f(0,1,1) = (-1,0,-1)
\end{aligned}$$

Si tratta ora di risolvere le tre equazioni $xp_1 + yp_2 + zp_3 = f(p_i)$ per $i = 1, 2, 3$, per esprimere $f(p_i)$ come combinazione lineare di $p_1,\ p_2,\ p_3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a ognuna di tale equazioni, scrivendo le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i tre sistemi, considerando separatamente le tre colonne dei termini noti.

$$f(p_1): \quad \begin{cases} x = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$f(p_2): \quad \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 2 \\ 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_2) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$f(p_3): \quad \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_3) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice cercata è la matrice che ha $f(p_i)_{\mathcal{B}}$ come colonne:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che avevamo ottenuto $f(p_2) = -f(p_1)$, quindi alcuni calcoli potevano essere evitati.

b) Per rispondere alla seconda domanda possiamo procedere in due modi
  – Determinare la matrice $M(f)$ associata a $f$ rispetto alla base canonica.
  – Lavorare sulla matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ trovata, ricordando poi di trasformare rispetto alla base canonica i vettori trovati.

In ogni caso possiamo osservare che $f(p_2) = -f(p_1)$ (la matrice ha due colonne linearmente dipendenti), quindi sicuramente $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$ e $\dim(\mathrm{N(f)}) \geq 1$.

Consideriamo entrambi i modi, notando che, avendo a disposizione la matrice espressa rispetto alla base canonica, il primo modo di procedere è più semplice. dal punto di vista logico.

– Utilizziamo la matrice $M(f)$ associata a $f$ rispetto alla base canonica:

$$f(x^2) = f(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$f(x) = f(0,1,0) = (-1,1,0)$$
$$f(1) = f(0,0,1) = (0,-1,-1)$$

quindi

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi una base dell'immagine è data dai vettori corrispondenti alla prima e seconda colonna:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(f)) = \{(1,0,1),\ (-1,1,0)\} = \left\{x^2+1,\ -x^2+x\right\}$$

Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $M(f)$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N(f)}) = \{(1,1,1)\} = \left\{\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1\right\}$$

– In alternativa utilizziamo la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ riducendola a gradini:

$$\begin{matrix} \\ 2II \\ 2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III+5I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'immagine di $f$ è generata da $f(p_i)$, $i = 1, 2, 3$, ovvero dalle colonne di $M_{\mathcal{B}}(f)$, mentre il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}(f)$, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 2, \qquad \dim(\mathrm{N(f)}) = 3 - \mathrm{rg}(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f})) = 1$$

Per scrivere esplicitamente immagine e nucleo dobbiamo tornare a esprimerei vettori rispetto alla base canonica. L'immagine di $f$ è generata dai vettori linearmente indipendenti corrispondenti alla prima e terza colonna di $M_{\mathcal{B}}(f)$. Quindi

$$f(p_1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}} = (1, -2, -1) = x^2 - 2x - 1$$
$$f(p_3) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = (-1, 0, -1) = -x^2 - 1$$

e una base di $\mathrm{Im}(f)$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(f)) = \left\{x^2 - 2x - 1, x^2 - 1\right\}$$

Analogamente per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}(f)$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \cdot t$$

Poiché

$$(1, 1, 0)_{\mathcal{B}} = 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 = (1, 1, 1) = x^2 + x + 1$$

una base del nucleo di $f$ è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N(f)}) = \left\{\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1\right\}$$

$\square$