CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 6 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 6.1 (7.12)**.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:

La matrice associata a al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$. Utilizzando il determinante, ricordiamo che il rango di una matrice corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero. Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = (1+k) \cdot \det \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = (1+k)k^3$$

Quindi il sistema ammette una unica soluzione quando $k \neq 0, -1$.

b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$ (senza la necessità di ridurre la matrice associata):

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 2 \\ x + 2w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 6.2 (7.15)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k-1 \\ kx_1 + kx_2 = 2k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette soluzione, specificando se e quando ne ammette una o infinite.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, si determinino le sue soluzioni.*

Soluzione:

La matrice associata al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ k-1 & k-1 & 0 & 0 & | & k-1 \\ k & k & 0 & 0 & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Utilizziamo il determinante per calcolare $\text{rg}(A)$ e $\text{rg}(A|b)$.

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot [k(k-1) - k(k-1)] = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

Poiché $\det(A) = 0$, $\text{rg}(A) \leq 3$ per ogni k. Viceversa in $A|b$ troviamo la sottomatrice quadrata

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & | & k-1 \\ k & 0 & 0 & | & 2k \end{bmatrix}$$

che ha determinante

$$\det = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k-1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & 2k \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2)[2k(k-1) - k(k-1)] = -2(k^2 - k)$$

Tale determinante si annulla per $k = 0, 1$, quindi sicuramente se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A|b) = 4$.

Abbiamo così ottenuto che se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A) \leq 3$, mentre $\text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

Si tratta ora di considerare i due casi $k = 0$ e $k = 1$.

Se $k = 0$ otteniamo il sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} -III \\ \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $k = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - II - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi anche se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Abbiamo visto che il sistema ha soluzione solo se $k \neq 0, 1$. Inoltre se $k = 0$ abbiamo ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = -1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Analogamente nel caso $k = 1$ abbiamo ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 2 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 2t + 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 6.3 (7.18). *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \quad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = -(k+4)\cdot\det\begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2\cdot[2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A): \begin{cases} x + 4y + 8w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 4z = 0 \\ 2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A) = \{(-4,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-4,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = -4$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 31II - 8I \\ \\ 2IV - II \end{array} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ 31IV + 5II \end{array} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -966 \end{bmatrix}$$

$$N(A): \begin{cases} -31x + 4w = 0 \\ 31z - 218w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow N(A) = \{(0,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = -4$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

$\square$

Esercizio 6.4 (7.29)**.** *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice A associata a tale insieme di vettori per stabilire se, o quali vettori sono linearmente indipendenti.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \\ 3k-2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizziamo il determinante. Consideriamo la sottomatrice B formata dalle prime 3 righe:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = -(k-1+2k^2-2) - (-3k^2+3) = k^2 - k$$

il cui determinante si annulla per $k = 0, 1$. Quindi:

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Di conseguenza $\dim(V) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \left\{(0, k-1, k^2-1, 3k-2),\ (1,3,0,3),\ (-1,-2,1,-1)\right\}.$$
- Se $k = 0$ la matrice A diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - 2I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = \dim(V) = 2$. Inoltre
$$\mathcal{B}(V) = \{\ v_1,\ v_2\} = \{(0,-1,-1,-2),\ (1,3,0,3)\}$$

- Se $k=1$ la matrice A diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
Notiamo che A contiene la sottomatrice C:
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1 \cdot 3 \neq 0$$
Quindi anche per $k=1$, $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \{(0,0,0,1),\ (1,3,0,3),\ (-1,-2,1,-1)\}.$$

□

Esercizio 6.5 (7.30)**.** *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:*
$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$
Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai 4 vettori:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 3 & k & 1 \\ 1 & 4 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-I \\ IV+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & k \end{bmatrix}$$
Chiamiamo A' la matrice ridotta così ottenuta. Sappiamo che $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A)$. Sappiamo inoltre che il rango di una matrice corrisponde, oltre che al numero di pivot, al massimo ordine di una sottomatrice con determinante non nullo. Senza proseguire ulteriormente nella riduzione possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A' per calcolarne il rango:
$$\det(A') = -1 \cdot (k+1) \cdot [(k-1)k - 2] = -(k+1)(k^2 - k - 2)$$
e $\det(A') = 0$ se $k = -1$ o $k = 2$. Di conseguenza
- Se $k \neq -1, 2$, $\det(A') \neq 0$, quindi la matrice A ha rango 4, e $\dim(W) = 4$.
- Se $k = -1$ la matrice A' ha determinante nullo, quindi $\mathrm{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione A diventa
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
Questa contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-1(-2-5) \neq 0$.
Quindi A ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.
- Se $k = 2$ la matrice A' ha determinante nullo, quindi $\mathrm{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione diventa
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
Questa contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-3 \neq 0$.

Quindi anche in questo caso A ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.

In alternativa tutto l'esercizio poteva essere svolto completando la riduzione a gradini di A.

$\square$

Esercizio 6.6 (7.68). *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare una base di V.*

Soluzione:

Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $a_i \in \mathbf{R}$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. A $p(x)$ possiamo associare le sue componenti $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$ formata dai polinomi $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$. Quindi a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$ possiamo associare il vettore $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4$.

Nel nostro caso la condizione $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0+a_1+a_2+a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:

$$W = \left\{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$

cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

a) L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.
b) Per trovare una base di V determiniamo una base di W per poi tornare ai polinomi.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi il generico elemento di W ha la forma

$$(-1, 1, 0, 0) \cdot r + (-1, 0, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 0, 1) \cdot t$$

e una base di W è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 1, 0, 0),\ (-1, 0, 1, 0),\ (-1, 0, 0, 1)\}$$

Associamo ora ai vettori determinati i corrispondenti polinomi:

$$\begin{aligned} (-1, 1, 0, 0) &\;\Rightarrow\; p_1(x) = -1 + x \\ (-1, 0, 1, 0) &\;\Rightarrow\; p_2(x) = -1 + x^2 \\ (-1, 0, 0, 1) &\;\Rightarrow\; p_3(x) = -1 + x^3 \end{aligned}$$

Infine l'insieme

$$\mathcal{B}(V) = \left\{p_1(x) = -1 + x,\ p_2(x) = -1 + x^2,\ p_3(x) = -1 + x^3\right\}$$

è una base di V.

$\square$

Esercizio 6.7 (7.81). *Sia W il sottoinsieme dello spazio di polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(1) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Trovare una base e la dimensione di W.*
c) *Determinare le coordinate del polinomio $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ rispetto alla base trovata al punto b).*

Soluzione:

a) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo innanzitutto verificare che W è un sottoinsieme di $\mathbf{R}_2[x]$. In effetti la condizione $p''' = 0$ applicata al generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$ diventa $6a = 0$. Quindi se $p(x) \in W$ deve essere del tipo $p(x) = bx^2 + cx + d$ cioè un elemento di $\mathbf{R}_2[x]$. Inoltre W può essere riscritto come

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$$

Per dimostrare ora che si tratta di un sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

– W è chiuso rispetto alla somma, infatti presi due elementi di W anche la loro somma sta in W:

$$(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 + 0 = 0$$

– W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di W e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in W:

$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Traducendo la condizione $p(1) = 0$ sui coefficienti del generico elemento $bx^2 + cx + d$ di $\mathbf{R}_2[x]$ otteniamo $b + c + d = 0$, ovvero $d = -b - c$. Quindi ogni elemento di W è del tipo

$$p(x) = bx^2 + cx - b - c = b(x^2 - 1) + c(x - 1)$$

I due polinomi, linearmente indipendenti, $p_1(x) = x^2 - 1$ e $p_2(x) = x - 1$ costituiscono una base di W, quindi

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^2 - 1,\ p_2(x) = x - 1\right\}$$

c) Per determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata la cosa più semplice è forse associare ad ogni polinomio le sue componenti rispetto alla base canonica $\left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai polinomi $p_1(x),\ p_2(x),\ p(x)$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 0, -1), \quad p_2 = (0, 1, -1), \quad p = (2, -1, -1)$$

Risolviamo quindi l'equazione $xp_1 + yp_2 = p$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Infine $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$, ovvero $p(x)$ ha coordinate $(2, -1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

□

Esercizio 6.8 (7.69). *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori

$$p_1 = (0, 1, 1)$$
$$p_2 = (1, 2, 1)$$
$$p_3 = (-1, 1, 0)$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(1, -1, 2)$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente idipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 6.9 (7.70)**.** *Si considerino i polinomi* $p_1 = x^2+ax+b+c$, $p_2 = x^2+bx+a+c$, $p_3 = x^2+cx+a+b$.
a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}[x]$.
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.*

SOLUZIONE:
Associamo ad ogni polinomio il vattore che esprime le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}[x]$:

$$p_1 = (1, a, b + c), \qquad p_2 = (1, b, a + c), \qquad p_3 = (1, c, a + b)$$

Possiamo quindi svolgere l'esercizio lavorando sui tre vettori.
Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - aI \\ III - (b+c)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai tre vettori ha sempre rango minore di tre, quindi i tre vettori e i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Dal punto a) sappiamo che $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha sicuramente dimensione minore di tre. Inoltre
   – Se $a = b = c$, allora la matrice ha rango 1 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 1. Una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1\}$ (o da $\{p_2\}$ o da $\{p_3\}$).
   – Se $a \neq b$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalle prime due colonne ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_2\}$.
   – Se $a \neq c$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalla prima e terza colonna ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_3\}$.

□

Esercizio 6.10 (7.73)**.** *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di* $\mathbf{R}_2[x]$.

SOLUZIONE:
Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{ a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. In particolare ai polinomi $p_1,\ p_2,\ p_3$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1,1,0)$$
$$p_2 = (k,0,-1)$$
$$p_3 = (1,2,k)$$

Di conseguenza i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

Per rispondere a entrambe le domande dell'esercizio riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori a cui affianchiamo la matrice identica 3×3.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - kII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & | & -1 & 1 & -k \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la prima parte della matrice: se $k \neq \pm 1$ la matrice associata ai vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$ ha rango 3, quindi i tre vettor isono linearmente indipendenti. Analogamente i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.

b) Se $k = \pm 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e dalla matrice ridotta ricaviamo che p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti. Inoltre considerando tutta la matrice possiamo notare che la prima, la seconda e la quarta colonna (per esempio) sono linearmente indipendenti. Ricordiamo che la quarta colonna corrisponde al vettore $(1,0,0)$ ovvero al polinomio $q = x^2$. Quindi:
   - Se $k = 1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:
   $$\mathcal{B} = \{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = x^2 - 1, \quad q = x^2\}$$
   - Se $k = -1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:
   $$\mathcal{B} = \{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = -x^2 - 1, \quad q = x^2\}$$

□

Esercizio 6.11 (7.82)**.** *Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$).

a) *Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.*
b) *Determinare una base di S.*

Soluzione:

a) Notiamo che la condizione percé una matrice 2×2 appartenga a S è che gli elementi di posto $1,2$ e $2,1$ siano uguali.

   Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.
   - SOMMA. Siano
   $$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$$
   due generici elementi di S. Allora
   $$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$$
   - PRODOTTO per scalari. Sia
   $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$
   un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora
   $$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix} \in S$$

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \\ &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di S. Infatti:
- Abbiamo appena visto che il generico elemento di S si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.
- Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 6.12 (7.85)**.** *Si consideri il sottospazio*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a+b+3c & 2b-6c \\ a+3b-7c & 4a+8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.

a) *Determinare una base di S.*

b) *Stabilire se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ (ed in caso positivo esprimere A come combinazione lineare della base trovata in* a)*).*

Soluzione:

a) La generica matrice di S la possiamo scrivere nella forma

$$a \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Quindi se

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

lo spazio S è $S = \langle A_1,\ A_2,\ A_3 \rangle$. Per determinare una base di S dobbiamo stabilire quante e quali di tali matrici sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$. La matrice dei coefficienti associata a a tale sistema è

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I \\ \\ III \\ 1/4IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-3I \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 24 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 1/8III \\ 1/3IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2 quindi il sistema ammette infinite soluzioni, le tre matrici sono linearmente dipendenti e $\dim(S) < 3$. Inoltre la matrice dei coefficienti associata all'equazione $xA_1 + yA_2 = 0$, una volta ridotto diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso l'equazione ammette solo la soluzione nulla, quindi A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(S) = 2$ e una base di S è data da

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Si tratta di risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 = A$ ovvero il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2y = 0 \\ x + 3y = \frac{2}{3} \\ 4x + y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \\ 4x = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Infine

$$A = \frac{2}{3} A_1$$

□

Esercizio 6.13 (7.86)**.** *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1 A + M_2 A = (M_1 + M_2) A$$

   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.
   – **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M) A$$

   Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} -8a - 7c & -8b - 7d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$MA = \begin{bmatrix} -8a + b & -7a \\ -8c + d & -7c \end{bmatrix}$$

Quindi

$$MA = AM \ \Rightarrow \begin{cases} -8a - 7c = -8a + b \\ -8b - 7d = -7a \\ a = -8b + d \\ b = -7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 7c = 0 \\ 7a - 8b - 7d = 0 \\ a + 8b - d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-7I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-8II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -8t + s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{bmatrix} -8t + s & -7t \\ t & s \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \mid \forall s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

Di conseguenza S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 6.14 (7.88)**.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini una base del sottospazio* $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}$.

b) *Mostrare che il sottoinsieme* $W = \{X \in U : X \text{ è invertibile}\}$ *non è un sottospazio vettoriale di* U.

Soluzione:

Sia

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$.

$$AX = \begin{bmatrix} x + kz & y + kw \\ 2x + 3z & 2y + 3w \end{bmatrix} \qquad XA = \begin{bmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ z + 2w & kz + 3w \end{bmatrix}$$

Da $AX = XA$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + kz = x + 2y \\ y + kw = kx + 3y \\ 2x + 3z = z + 2w \\ 2y + 3w = kz + 3w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + kz = 0 \\ kx + 2y - kw = 0 \\ 2x + 2z - 2w = 0 \\ 2y - kz = 0 \end{cases}$$

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2III \\ I \\ II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-kI \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z - w = 0 \\ -2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -s + t \\ y = \frac{k}{2}s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

a) Abbiamo ottenuto che

$$\mathcal{B}(U) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) W non è un sottospazio in quanto, per esempio, non contiene l'elemento nullo. Infatti la matrice nulla

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è invertibile.

□

Esercizio 6.15 (7.89)**.** *Sia* $W = \langle A,\ B\ ,C\rangle$ *il sottospazio di* $M_2(\mathbf{R})$ *generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W *e una sua base al variare del parametro reale* k*.*

Soluzione:

Cominciamo a stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolvento l'equazione matriciale $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y + (k-1)z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y + (k-1)z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti:

$$\dim(W) = 3$$
$$\mathcal{B}(W) = \{A,\ B,\ C\}$$

- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t,\ y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti. In particolare A è la matrice nulla e $A = 0 \cdot B + 0 \cdot C$ dipende linearmente da B e C. Se studiamo invece la dipendenza di B e C risolvendo l'equazione $yB + zC = 0$ otteniamo la sola soluzione $y = z = 0$ quindi B e C sono linearmente indipendenti (Infatti B e C non sono una multiplo dell'altra). Di conseguenza

$$\dim(W) = 2$$
$$\mathcal{B}(W) = \{B,\ C\}$$

□

Esercizio 6.16 (6.5)**.** *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Poichè $\det(A_1) = -1 - 4 = -5$ la matrice A_1 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \; A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_2. Poichè $\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, la matrice A_2 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}0 = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \; A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_3. Poichè $\det(A_3) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, la matrice A_3 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}3 = 3 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}1 = -1 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \; A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_4) = 10 \neq 0$, la matrice A_4 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2} = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{13} = (-1)^{1+3}1 = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 20 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \\ a'_{23} = (-1)^{2+3} = \det\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{32} = (-1)^{3+2} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \\ a'_{33} = (-1)^{3+3} = \det\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \; A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_5) = -6 \neq 0$, la matrice A_5 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 3 & a'_{12} = 0 & a'_{13} = 0 \\ a'_{21} = 0 & a'_{22} = -6 & a'_{23} = 0 \\ a'_{31} = 0 & a'_{32} = 0 & a'_{33} = -2 \end{array}$$

Quindi

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_6) = 4 \neq 0$, la matrice A_6 è invertibile. Inoltre

$$a'_{11} = 7 \qquad a'_{12} = -3 \qquad a'_{13} = -2$$
$$a'_{21} = 7 \qquad a'_{22} = 1 \qquad a'_{23} = -2$$
$$a'_{31} = -5 \qquad a'_{32} = 1 \qquad a'_{33} = 2$$

Quindi

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.17 (6.7)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Soluzione:

a) Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k-2) \cdot [k(2-k) - k] = (2k-2)(-k^2 + k)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se

$$2k - 2 = 0 \ \Rightarrow \ k = 1$$
$$-k^2 + k = 0 \ \Rightarrow \ k = 0 \text{ o } k = 1$$

Infine A è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ -1/4II \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + 4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I - 2II \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I - III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Abbiamo visto che se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante non nullo, quindi in questi casi $\text{rg}(A) = 3$. Inoltre:
   - Se $k = 0$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ 1/2II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

   - Se $k = 1$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

□