CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 5 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 5.1 (5.6)**.** *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7),\quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1),\quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Soluzione:

La risoluzione dell'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio.

Sappiamo infatti che data l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$

- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente indipendenti** se l'equazione ammette solo la soluzione nulla: $x = y = z = 0$.
- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente dipendenti** se l'equazione ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$.

Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - y + 2z = 0 \\ 7x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z \\ 6y - 12z - y + 2z = 0 \\ -14y + 28z - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z \\ 5y - 10z = 0 \\ -15y + 30z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z \\ y = 2z \\ -30z + 30z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$0v_1 + 2tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Dall'equazione precedente notiamo che

- v_1 non si può esprimere come combinazione lineare di v_2 e v_3.
- Ponendo per esempio $t = 1$, otteniamo $2v_2 + v_3 = 0$ ovvero

$$v_2 = -\frac{1}{2}v_3$$

- Analogamente al punto precedente otteniamo

$$v_3 = -2v_2$$

□

Esercizio 5.2 (5.9)**.**

a) *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^5$ *sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$

b) *Per i valori di* k *determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Soluzione:

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III+II \\ V-II \\ IV \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & k & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-kII \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \\ (k-2)z=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 2$ otteniamo la soluzione $x = y = z = 0$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi per $k = 2$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

b) Al punto precedente abbiamo trovato che se $k = 2$ allora

$$-2tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

In particolare ponendo per esempio $t = 1$ oteniamo

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$
$$v_2 = 2v_1 - v_3$$
$$v_3 = 2v_1 - v_2$$

□

Esercizio 5.3 (7.23)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$.*

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Soluzione:

Sappiamo che tre vettori di $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & k-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Ragionando sui ranghi:

- Se $k \neq 1$ la matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3 e v_1, v_2 e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.
- Se $k = 1$ la matrice ha 2 pivot, quindi ha rango 2 e v_1, v_2 e v_3 non formano una base di $\mathbf{R}^3$.

□

Esercizio 5.4 (7.25)**.** *In $\mathbf{R}^3$ siano*

$$v_1 = (k,2,1), \quad v_2 = (-2,1,0), \quad v_3 = (0,1,1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k i tre vettori costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori trovati al punto* a)*, si calcolino le coordinate del vettore $v = (-2,1,2)$ rispetto a tale base.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} k & -2 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ k & -2 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & -2 & -k & | & -2-2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -k-2 & | & -2k-8 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti ha rango 3 se $k \neq -2$, quindi v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$ se $k \neq -2$.

b) Risolviamo, per $k \neq -2$, il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -3 \\ (k+2)z = 2k+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{k+2} \\ y = \frac{-k+2}{k+2} \\ z = \frac{2k+8}{k+2} \end{cases}$$

Infine v ha coordinate $\left(-\dfrac{4}{k+2}, \dfrac{-k+2}{k+2}, \dfrac{2k+8}{k+2}\right)$ rispetto a $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

□

Esercizio 5.5 (7.26). *Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0), \ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0), \ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di V.*

b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 affiancata dal vettore v per rispondere a entrambe le domande.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+I \\ III+2I \\ IV+I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ 2III-II \\ IV-III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il rango di A è 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 = v$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale equazione (basta ignorare la terza colonna relativa a v_3). quindi

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow v = 2v_1 + 2v_2, \qquad v = (2, 2)_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 5.6 (7.31). *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (3, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-6, 2, -4, 0), \quad v_3 = (-3, k, k-3, 0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*

b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & | & -3 \\ -1 & 2 & | & k \\ 2 & -4 & | & k-3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II+1/3I \\ III-2/3I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & | & k-1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

– Se $k \neq 1$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
– Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.

Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:
– Se $k = 1$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi se $k = 1$, $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$.
– Se $k \neq 1$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$.

□

Esercizio 5.7 (7.37)**.** *Sia*

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k + 3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k + 6, -3)$ appartiene a V.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori v_1, v_2 e v_3, affiancata dalla colonna dei termini noti formata dal vettore v_4 (in modo da risolvere anche l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 1 & k+3 & 1 & | & 3 \\ 2 & 4 & 1 & | & k+6 \\ -1 & -2 & k^2-1 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - (k^2-1)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -k(k^2-1) \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice A.
– Se $k \neq -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 3 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

– Se $k = -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 2 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3\}.$$

b) v_4 appartiene a V se il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione, ovvero se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

Notiamo che $-k(k^2 - 1) = 0$ se $k = 0, \pm 1$. Quindi
– Se $k \neq 0, \pm 1$, allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ e v_4 non appartiene a V.
– Se $k = 0$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.

– Se $k=1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.

– Se $k=-1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 non appartiene a V.

$\square$

Esercizio 5.8 (7.38)**.** *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:*

$$v_1 = (1,1,2), \quad v_2 = (0, k-1, k-1), \quad v_3 = (2, 1, k+5)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.*

b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1,3,4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & k-1 & 1 & | & 3 \\ 2 & k-1 & k+5 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & k-1 & k+1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti. Dobbiamo distinguere tre casi:

– Se $k \neq 1, -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una base di V è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

– Se $k=1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_3\}$$

Notiamo che per $k=1$ il vettore v_2 è il vettore nullo, quindi è ovviamente dipendente dagli altri due.

– Se $k=-2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla seconda colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2\}$$

In questo caso anche la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2, quindi poteva essere preso come base di V anche l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_3\}$

b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere tre casi:

– Se $k \neq 1, -2$ dalla matrice ridotta a gradini torniamo al sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ (k-1)y - z = 2 \\ (k+2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{2}{k-1} \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $v_4 \in V$:

$$v_4 = v_1 + \frac{2}{k-1} v_2$$

Notiamo che se $k \neq 1, -2$, $\dim(V) = 3$, quindi $V = \mathbf{R}^3$ e necessariamente $v_4 \in V$.

– Se $k = 1$ otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -z = 2 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

L'ultima equazione risulta impossibile, quindi in questo caso $v_4 \notin V$:

– Se $k = -2$ otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -3y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + 5 \\ y = t \\ z = -3t - 2 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Anche in questo caso $v_4 \in V$:

$$v_4 = (6t + 5)\, v_1 + t \cdot v_2 + (-3t - 2)\, v_3 \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

In particolare, ponendo per esempio $t = 0$, otteniamo la combinazione $v_4 = 5v_1 - 2v_3$.

□

Esercizio 5.9 (7.49)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*

b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:

Notiamo che

$$v = a_1(1, 1, 2, 1) + a_2(0, -1, -1, 3) + a_3(0, 2, 0, 0) + a_4(0, 0, 0, 1)$$

Siano

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \qquad v_2 = (0, -1, -1, 3), \qquad v_3 = (0, 2, 0, 0), \qquad v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

□

Esercizio 5.10 (7.51)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*

b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:

Notiamo che

$$v = a_1(1, 1, 2, 1) + a_2(-1, 0, -1, 3) + a_3(2, 0, 0, 0) + a_4(1, 0, 0, 0)$$

Siano

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \qquad v_2 = (-1, 0, -1, 3), \qquad v_3 = (2, 0, 0, 0), \qquad v_4 = (1, 0, 0, 0)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3 e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti tra loro, quindi una base può contenerne solo uno dei due; di conseguenza nella ricerca della base potevamo considerare dall'inizio solo i vettori v_1, v_2 e v_3 per verificare se sono linearmente indipendenti.

□

Esercizio 5.11 (7.53)**.** *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*

b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0, 1, 1, 1, -2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:

Notiamo che

$$w = a_1(2, 2, 1, 0, 1) + a_2(-1, 0, 0, 1, -4) + a_3(-1, -1, 0, 0, 1)$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2, 2, 1, 0, 1), \qquad v_2 = (-1, 0, 0, 1, -4), \qquad v_3 = (-1, -1, 0, 0, 1)$$

W è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se i tre vettori, o eventualmente quali, sono linearmente indipendenti. Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, o di una parte di essi. Per rispondere a entrambe le domande dobbiamo quindi ridurre a gradini la matrice associata ai tre vettori v_1, v_2 e v_3, e al vettore v.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ 2III - II \\ \\ IV - III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II \\ V + 4II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ V - III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) La matrice associata a v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di W è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Si tratta di esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow x = y = z = 1$$

Infine le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1)$.

□

Esercizio 5.12 (7.54)**.** *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

SOLUZIONE:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{ \ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

E' ora evidente che ogni elemento di S si può scrivere nella forma

$$(0, -1, 1) \cdot t$$

quindi una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1)\}$$

□

Esercizio 5.13 (7.55)**.** *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

SOLUZIONE:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{ \ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Separiamo le variabili nella scrittura del generico elemento di S:

$$(2s, s, 0) + (-t, 0, t) = (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t$$

Quindi S è generato dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(2,1,0),\ (-1,0,1)\}$$

Per come è stato calcolato, e comunque sarebbe immediato verificarlo, l'insieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, quindi si tratta effettivamente di una base di S.

□

Esercizio 5.14 (7.56)**.** *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a)*, trovare una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema lineare formano un sottospazio sse si tratta di un sistema omogeneo. Di conseguenza deve essere $k = 0$.
b) Risolviamo il sistema omogeneo ottentuto per $k = 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -r \\ x_2 = -r + 2t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \forall\, r, s, t \in \mathbf{R}$$

Infine

$$\begin{aligned} S &= \{(-r, -r + 2t, r, s, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\ \} \\ &= \{(-1, -1, 1, 0, 0) \cdot r\ +\ (0, 0, 0, 1, 0) \cdot s\ +\ (0, 2, 0, 0, 1) \cdot t \mid r, s, t \in \mathbf{R}\ \} \end{aligned}$$

e una base di S è

$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-1, -1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1, 0),\ (0, 2, 0, 0, 1)\ \}$$

□

Esercizio 5.15 (7.59)**.** *Sia*

$$\begin{aligned} S = \big\{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k + 1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k + 2, \\ 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \big\} \end{aligned}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema formano uno spazio vettoriale sse il sistema è omogeneo:

$$\begin{cases} k + 1 = 0 \\ 2k + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ k = -1$$

b) Cerchiamo le soluzioni del sistema nel caso $k = -1$ riducendo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 16 & 12 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{3}{8}t \\ x_3 = t \\ x_4 = -2t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, 1, -2 \right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Infine

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, -2, 1 \right) \right\}, \qquad \dim(S) = 1$$

□

Esercizio 5.16 (7.61)**.** *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*
b) *Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{r} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k - k^2 & -1 - k \end{bmatrix}$$

Quindi

- Se $k \neq -1$ la matrice A ha rango 3.
- Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2.

b) Ponendo $k = 1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$N(A) = \{\ (-1, 0, 1, -1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\ \}$$

e una base del nucleo è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(N(A)) = \{\ (-1, 0, 1, -1)\ \}$$

□

Esercizio 5.17 (7.62)**.**

a) *Sia*

$$V = \langle\ (1,2,1),\ (-1,3,0),\ (3,1,2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0\ \right\}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango della matrice A associata ai tre vettori riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/5 II \\ III - 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 2$$
$$\mathcal{B}(V) = \{\ (1,2,1),\ (-1,3,0)\ \}$$

b) Associamo al sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che i conti sono già stati eseguiti al punto precedente. Quindi

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

e

$$\dim(S) = 1$$
$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-2,1,1)\ \}$$

c) Notiamo che con la stessa matrice abbaimo risolto due esercizi differenti tra cui in genere è facile confondersi. La relazione tra i due esercizi, oltre alla medesima riduzione della matrice, è solo legata alle dimensioni:

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(S) = \text{numero delle incognite} - \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(V) + \dim(S) = \text{numero delle incognite}$$

$\square$