CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 4 – GEOMETRIA 2009/10

Esercizio 4.1 (7.9)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?*

Soluzione:

Poichè non ci sono richieste esplicitamente le soluzioni, ma solo la loro esistenza, utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Ricordiamo inoltre che:

Il **rango** *di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.* In seguito vedremo altri metodi per calcolare il rango di una matrice.

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Il sistema è compatibile se il rango della matrice completa e incompleta coincidono. Per determinare il rango riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

La matrice incompleta ha due pivot, quindi ha rango 2. La matrice completa ha rango 2 solamente se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$.

Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Per $k = \pm 2$ il rango della matrice è 2, mentre le incognite sono 3, quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

□

Esercizio 4.2 (7.10)**.** *Dato il sistema*

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ x + (k-1)y + (k+1)z = 1 \\ x + (k-1)y + (k^2 + 4k + 3)z = k + 3 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema ammette soluzioni. In tali casi stabilire anche se ne ammette una o infinite.

Soluzione:

Utilizziamo il Teorma di Rouchè-Capelli per stabilire quando il sistema ha soluzione. A tale scopo consideriamo la matrice $A|b$ associata al sistema e la riduciamo a gradini per stabilirne il rango.

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 1 \\ 1 & k-1 & k+1 & | & 1 \\ 1 & k-1 & k^2+4k+3 & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & | & k+2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora i pivot di A osservando che $k^2+3k+2=0$ quando $k=-1$ o $k=-2$. Dobbiamo quindi distinguere tre casi.

- Se $k \neq 1, -1, -2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 =$ numero delle incognite del sistema. Quindi in questi casi il sistema ammette una unica soluzione.
- Se $k=1$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-6II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k=-1$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.
- Infine se $k=-2$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema ammette soluzione. Poichè inoltre il rango è inferiore al numero delle incognite, in questo caso il sistema ammette infinite soluzioni.

$\square$

Esercizio 4.3 (7.20)**.** *Si consideri la matrice*
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$
dove k è un parametro reale.

a) *Si calcoli il rango di A.*
b) *Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax=b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II-3/2II \\ III+1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & k+2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice A ha rango 3 se $k \neq 1, -2$, ha rango 2 se $k=1$ e ha rango 1 se $k=-2$.
b) Il sistema $Ax=b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$ se la matrice dei coefficienti ha rango 3 nel qual caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ per ogni $b \in \mathbf{R}^3$, ovvero se $k \neq 1, -2$.

$\square$

Esercizio 4.4 (4.9)**.** *Sia*
$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+(k+1)z = k, \quad 2x+y+z=0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che
$$\begin{cases} x+y+(k+1)z = k \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k=0$

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{\ (0, -1, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\}$$

□

Esercizio 4.5 (4.10)**.** *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1,\ x - 2y + z = 0,\ -2x + 4ky - 2z = 0\ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \mid & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \mid & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} S &= \{\ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{\ (2s, s, 0) + (-t, 0, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{\ (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t \mid s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.6 (4.11)**.** *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

Soluzione:

a) S è uno spazio vettoriale se il sistema è omogeneo cioè se $k = 0$.

b) Risolviamo il sistema omogeneo, riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -r \\ x_2 = -r + 2t \\ x_3 = r \qquad\qquad \forall\, r, s, t \in \mathbf{R} \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-r, -r + 2t, r, s, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-r, -r, r, 0, 0) + (0, 0, 0, s, 0) + (0, 2t, 0, 0, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-1, -1, 1, 0, 0) \cdot r \ + \ (0, 0, 0, 1, 0) \cdot s \ + \ (0, 2, 0, 0, 1) \cdot t \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.7 (7.21)**.** *Siano dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (2, 1, 1), \qquad v_2 \equiv (-1, 1, 2), \qquad v_3 \equiv (3, -2, -1), \qquad v_4 \equiv (4, -1, -2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3*.*

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Notiamo che il vettore $xv_1 + yv_2 + zv_3$ è dato da:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = (2x - y + 3z,\ x + y - 2z,\ x + 2y - z)$$

quindi all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ associamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta del sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 1 & 1 & -2 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

dove A è la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2 e v_3, e b è dato dal vettore v_4. In generale passeremo direttamente dall'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ al sistema $A|b$ associato.

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. Riduciamo quindi la matrice a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ 2II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 3III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette (una unica) soluzione e v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

□

Esercizio 4.8 (7.22)**.** *Siano dati i segunti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1, 1, 1), \qquad v_2 \equiv (2, 7, 7), \qquad v_3 \equiv (0, k^2 + 2, 3), \qquad v_4 \equiv (1, k + 3, k^2 + 2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Soluzione:

Si tratta di stabilire se il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Consideriamo la matrice associata a tale sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 7 & k^2 + 2 & | & k + 3 \\ 1 & 7 & 3 & | & k^2 + 2 \end{bmatrix}$$

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

Riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & k^2+2 & | & k+2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & k^2-k-1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il pivot della terza riga e distinguiamo i casi necessari.

- Se $k \neq \pm 1$ sia la matrice completa che quella incompleta hanno 3 pivot, quindi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (una unica) soluzione. Di conseguenza v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = 1$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

  Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

  Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

$\square$

Esercizio 4.9 (6.4)**.** *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $rref(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -5 & | & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/5II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I - 2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

  Di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $rref(B)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{c} I - 3III \\ \Rightarrow\ II + 1/2III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I + II \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n\times n}$ è una matrice tale che $rref(M) = I_n$, allora $\mathrm{rg}(M) = n$, quindi: *una matrice $n \times n$ è* **invertibile** *se e solo se ha rango n.*

□

Esercizio 4.10 (v. 6.7)**.** *Si calcoli la matrice inversa di*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Calcoliamo l'inversa di A con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} I-III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 4.11 (6.9)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ II-3kI \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:
– Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$.
– Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$.

□

Esercizio 4.12 (6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+kII \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+kII \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & -2 & k & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{k(k-4)}III \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow II-(k-4)III \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} I-kII \\ \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

$\square$