CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – I PROVA DI ACCERTAMENTO C – 21/4/2010

Esercizio 1.1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & k+3 & k+3 \\ 1 & 0 & k+3 & 2k+6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ k+4 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = (-2, -3/2, 1, 3/4)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:
Per lo svolgimento nei dettagli si veda la fila A o la fila B. I risultati per questa fila sono:

a)
- Se $k \neq -1, -2$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{k+4}{k+2} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{-k}{k+2} \\ w = 1 \end{cases}$$

- Se $k = -1$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = 1 \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $(1, 0, 1, 0) + (-4, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

- Se $k = -2$ otteniamo $\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) $v \in \mathrm{Sol}(Ax = b)$ se $k = -1$.

□

Esercizio 1.2. *Siano r la retta passante per i punti $A = (3, 0, 1)$ e $B = (2, 1, 2)$ e s la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a r e passante per il punto Q di intersezione tra l'asse delle y e il piano contenente r e s.*
b) *Si determinino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad r e s e passante per il punto $P = (1, 2, -1)$.*

Soluzione:
Per lo svolgimento nei dettagli si veda la fila A o la fila B. I risultati per questa fila sono:

a) Il piano π contenente r e s ha equazioni parametrica e cartesiana date da

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t + 2s \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad \qquad \pi : \quad y + z = 3$$

L'asse delle y ha equazione $x = z = 0$, quindi il punto Q è $Q = (0, 3, 0)$ e il piano cercato è:

$$\pi' : \quad x - y - z = -3$$

b) La retta cercata ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \begin{cases} x - y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

□

Esercizio 1.3. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 1, 1, 0), \ v_2 = (0, 0, 2, 0), \ v_3 = (2, -2, k+1, 0) \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = -1$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (1, -1, 3, 0)$ appartiene a V.*

Soluzione:
Per lo svolgimento nei dettagli si veda la fila A o la fila B. I risultati per questa fila sono:

a) – Se $k \neq -1$, allora $\text{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
   – Se $k = -1$, $\text{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2\}$.

c) – Se $k \neq -1$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
   – Se $k = -1$, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$, quindi anche in questo caso $w \in V$

b) Una base di $\mathbf{R}^4$ contenente la base di V trovata al punto a) è data da $\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_1, v_2, e_1, e_4\}$.

□

Esercizio 1.4. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid {}_{ij} = 0 \text{ per } i \leq j\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Stabilire i possibili valori del rango delle matrici A appartenenti a W.*

Soluzione:
Notiamo W è formato dalle matrici triangolari inferiori:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x+a & 0 & 0 \\ y+b & z+c & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.
   – PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda x & 0 & 0 \\ \lambda y & \lambda z & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Consideriamo la generica matrice di W:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

Il determinante di A è nullo, quindi $rg(A) \leq 2$. Inoltre

- Se $x = y = z = 0$ il rango è zero,
- Se $x \neq 0 \neq z$ il rango di A è 2,
- Negli altri casi il rango di A è 1.

□

Esercizio 1.5. *Cosa sono le* coordinate *di un vettore rispetto ad una base? Dopo averne dato la definizione, scrivere le coordinate del polinomio $p(x) = x^2 - 1 \in \mathbf{R}_2[x]$ rispetto a due basi diverse dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.*

Soluzione:

Fissata una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V, ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. I coefficienti di tale combinazione lineare costituiscono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$. Se V è di dimensione finita n, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, allora le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$.

Una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è quella canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Rispetto a tale base le coordinate di $p(x) = x^2 - 1$ sono $(-1, 0, 1)_{\mathcal{B}}$.

Un'altra possibile base è per esempio $\mathcal{B}' = \{2, x+1, x^2\}$. Rispetto a tale base le coordinate di $p(x) = x^2 - 1$ sono $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)_{\mathcal{B}'}$.

□