CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – I PROVA DI ACCERTAMENTO C – 21/4/2010

Esercizio 1.1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & k-2 & k+1 \\ 1 & 0 & k-2 & 2k+6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k+4 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = (-4/3, -3, -1/3, 1)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:

Per lo svolgimento nei dettagli si veda la fila A o la fila B. I risultati per questa fila sono:

a) – Se $k \neq 1, -2$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2k}{k-1} \\ y = -3 \\ z = -\dfrac{k+1}{k-1} \\ w = 1 \end{cases}$$

– Se $k = -2$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 2t \\ y = -3t \\ z = -\dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0\right) + (-2, -3, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

– Se $k = 1$ otteniamo $\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) $v \in \mathrm{Sol}(Ax = b)$ se $k = -2$.

□

Esercizio 1.2. *Siano r la retta passante per i punti $A = (3, 1, 0)$ e $B = (2, 2, 1)$ e s la retta di equazioni parametriche*

$$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a r e passante per il punto Q di intersezione tra l'asse delle x e il piano contenente r e s.*
b) *Si determinino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad r e s e passante per il punto $P = (2, 2, 1)$.*

Soluzione:

Per lo svolgimento nei dettagli si veda la fila A o la fila B. I risultati per questa fila sono:

a) Il piano π contenente r e s ha equazioni parametrica e cartesiana date da

$$\pi : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t \\ z = t + s \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad\qquad \pi : \quad x + y = 4$$

L'asse delle x ha equazione $y = z = 0$, quindi il punto Q è $(4, 0, 0)$ e il piano cercato è:

$$\pi' : \quad x - y - z = 4$$

b) La retta cercata ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 1.3. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (0, k, 0, k), \;\; v_2 = (0, 1, k, 1), \;\; v_3 = (0, -1, 0, 1) \quad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (0, k, k, 2)$ appartiene a V.*

Soluzione:
Per lo svolgimento nei dettagli si veda la fila A o la fila B. I risultati per questa fila sono:

a) – Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
– Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_2, v_3\}$. Notiamo che in tale caso $v_3 = 0$, quindi sicuramente non può appartenere ad una base.

c) – Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
– Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \notin V$

b) Una base di $\mathbf{R}^4$ che completi la base trovata al punto precedente è: $\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_2, v_3, e_1, e_3\}$.

□

Esercizio 1.4. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \textit{ per } i \geq j\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che per ogni matrice A in W, la matrice A^2 ha rango minore di 2.*

Soluzione:
L'insieme W è formato dalle matrici triangolari superiori

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } \; x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
– SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } \; x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & x + a & y + b \\ 0 & 0 & z + c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x + a & y + b \\ 0 & 0 & z + c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda x & \lambda y \\ 0 & 0 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Calcoliamo A^2

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza se $x = 0$ o $z = 0$ otteniamo la matrice nulla di rango zero, altrimenti $\text{rg}(A^2) = 1$. In ogni caso $\text{rg}(A^2) \leq 1$.

□

Esercizio 1.5. *Cos'è la* dimensione *di uno spazio vettoriale? Dopo averne dato la definizione, spiegare perché un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}^5$ *non può avere dimensione maggiore di 5.*

Soluzione:

Se lo spazio vettoriale è lo spazio nullo, formato dal solo vettore nullo, allora non ha una base e ha dimensione zero. Altrimenti la dimensione di uno spazio vettoriale corrisponde al numero di elementi di una sua base. Si può infatti dimostrare che basi differenti hanno lo stesso numero di elementi, se lo spazio è di dimensione finita; tale numero è appunto detto *dimensione* dello spazio vettoriale.

Sia V un sotospazio di $\mathbf{R}^5$. Ogni base di $\mathbf{R}^5$, che di conseguenza genera tutto lo spazio, è formata da 5 vettori. Di conseguenza se consideriamo un numero di vettori di $\mathbf{R}^5$ maggiore di 5, questi sono sicuramente linearmente dipendenti. Poiché una base di V è formata da vettori di $V \subseteq \mathbf{R}^5$ linearmente indipendenti, essa non può essere formata da più di 5 vettori e quindi la dimensione di V è minore o uguale a 5.

□