CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – I PROVA DI ACCERTAMENTO B – 21/4/2010

Esercizio 1.1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k+4 & k-5 \\ 1 & 0 & k+4 & 2k-4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ k+2 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*

b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(\frac{15}{4}, -2, \frac{1}{4}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

SOLUZIONE:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & k+4 & k-5 & 3 \\ 1 & 0 & k+4 & 2k-4 & k+2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-I \\ IV-III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & k+3 & k-3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k+1 & k-1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV-II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+3 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k-1 \end{array}\right]$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

– Se $k \neq 1, -3$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z - 2w = 2 \\ y + 2w = 0 \\ (k+3)z + (k-1)w = 1 \\ (k-1)w = k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \dfrac{2-k}{k+3} + 2 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-1)}{k+3} = \dfrac{2-k}{k+3} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5k+10}{k+3} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{2-k}{k+3} \\ w = 1 \end{cases}$$

– Se $k = 1$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z - 2w = 2 \\ y + 2w = 0 \\ 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \dfrac{1}{4} + 2t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{4} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} + 2t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{4} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\frac{7}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0\right) + (2, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

– Se $k = -3$ otteniamo $\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\mathrm{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(\frac{15}{4}, -2, \frac{1}{4}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z - 2w = 2 \\ y + 2w = 0 \\ (k+3)z + (k-1)w = 1 \\ (k-1)w = k-1 \end{cases}$$

Otteniamo quindi le condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{15}{4} + \dfrac{1}{4} - 2 = 2 \\ -2 + 2 = 0 \\ (k+3)\,\dfrac{1}{4} + (k-1) = 1 \\ k - 1 = k - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \;\; k = 1$$

Quindi $v \in \mathrm{Sol}(Ax = b)$ se $k = 1$.

□

Esercizio 1.2. *Siano r la retta passante per i punti $A = (2, 0, 1)$ e $B = (1, 1, -1)$ e s la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a r e passante per il punto Q di intersezione tra l'asse delle x e il piano contenente r e s.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad r e s e passante per il punto $P = (-2, 3, 3)$.*

Soluzione:
Notiamo che la retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e si tratta di una retta parallela ad s.

a) Si tratta di
   - Trovare il piano π passante per r e s,
   - determinare il punto Q intersecando l'asse delle y con il piano π trovato,
   - determinare un'equazione del piano ortogonale a r e passante per Q.

   Poiché r e s sono parallele sono complanari, ma per trovare il piano che le contiene dobbiamo procurarci un'altra direzione. Sia per esempio $C = (1, 1, 1)$ un punto di s, allora $\overrightarrow{CB} = (0, 0, 2)$ e il piano π contenente r e s ha equazioni parametrica e cartesiana date da

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t + 2s \end{cases} \qquad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad\qquad \pi : \quad x + y = 2$$

   L'asse delle x ha equazione $y = z = 0$, quindi il punto Q è dato da

$$Q : \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = (2, 0, 0)$$

   Infine il piano cercato ha direzione ortogonale a r, quindi al vettore $(1, -1, 2)$ e passa per $Q = (2, 0, 0)$, quindi

$$\pi' : \quad x - y + 2z = 2$$

b) Una retta perpendicolare ad r e s è perpendicolare al piano π trovato al punto precedente che le contiene. Di conseguenza la retta cercata può essere parallela al vettore $(1, 1, 0)$. Equazioni di tale retta sono quindi:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$$

□

Esercizio 1.3. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (0, k+1, 0, 3),\ v_2 = (2, 0, 0, k),\ v_3 = (0, 1, 0, 1) \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 2$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-2, 2, 0, 4)$ appartiene a V.*

Soluzione:

a) Per rispondere anche alla domanda c) riduciamo a gradini la matrice $A|b$ in cui A ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la colonna corrispondente al vettore w. Per comodità possiamo ordinare in A i vettori v_1, v_2 e v_3 nell'ordine $v_3,\ v_2,\ v_1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 1 & 0 & k+1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & k & 3 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 1/2I \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & k & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & k & 2-k & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-kII \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2-k & | & 2+k \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo la matrice A:
– Se $k \neq 2$, allora $\text{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
– Se $k = 2$, $\text{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_3, v_2\}$ (tenendo conto dell'ordine con cui i vettori sono stati scritti in A).

c) Dalla matrice ridotta notiamo che
– Se $k \neq 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
– Se $k = 2$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \notin V$

b) Per $k = 2$ abbiamo preso come base di V l'insieme $\mathcal{B} = \{v_3, v_2\}$. Si tratta quindi di aggiungere a questi due vettori altri due vettori in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^4$. A tale scopo possiamo ridurre a gradini la matrice ottenuta affiancando a v_1 e v_2 i vettori della base canonica, in modo da individuare tra questi i vettori da aggiungere.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prendendo le colonne con i pivot otteniamo che una possibile base di $\mathbf{R}^4$ è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_3, v_2, e_1, e_3\}$$

□

Esercizio 1.4. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A = A^T,\ tr(A) = 0\right\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Calcolare le coordinate di $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ rispetto alla base trovata al punto* b).

Soluzione:

Notiamo che la condizione $A^T = A$ implica che le matrici di W siano simmetriche. Inoltre la condizione $tr(A) = 0$ implica che la somma degli elementi della diagonale principale sia 0. Di conseguenza le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \qquad \text{con } \; a,b,c,d,e \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & w & t \\ z & t & -x-w \end{bmatrix} \qquad \text{con } \; x,y,z,w,t,a,b,c,d,e \in \mathbf{R}$$

   due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A+B = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ b+y & d+w & e+t \\ c+z & e+t & -a-x-d-w \end{bmatrix} \in W$$

   Quindi W è chiuso rispetto alla somma.
   – PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$

   un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d & \lambda e \\ \lambda c & \lambda e & -\lambda a - \lambda d \end{bmatrix} \in W$$

   Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \\ &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5\}$.

c) È immediato verificare che $B = 2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_4 + 3A_5$, di conseguenza le coordinate di B rispetto alla base trovata al punto precedente sono $(2, 1, 1, -1, 3)_{\mathcal{B}}$.

□

Esercizio 1.5. *Cos'è un* insieme di generatori *di uno spazio vettoriale? Dopo averne dato la definizione, trovare un insieme di generatori dello spazio dei polinomi $p(x) \in \mathbf{R}_3[x]$ che si annullano per $x = 2$.*

Soluzione:

Un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V è un insieme G formato da vettori di V tale che ogni vettore $v \in V$ è combinazione lineare dei vettori di G. Se in più gli elementi di G sono tra loro linearmente indipendenti, allora G è una base di V.

Lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in $x = 2$ è un sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ di dimensione 3. Infatti se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è tale che $p(2) = 0$, allora $8a + 4b + 2c + d = 0$, quindi il generico elemento di tale sottospazio è del tipo

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 8a - 4b - 2c = a(x^3 - 8) + b(x^2 - 4) + c(x - 2)$$

Di conseguenza l'insieme $\{x^3 - 8,\ x^2 - 4,\ x - 2\}$ è un insieme di generatori di tale sottospazio; in particolare si tratta di una base.

Un altro possibile insieme di generatori, che non è una base, è l'insieme $\{x^3 - 8,\ x^2 - 4,\ x - 2,\ x^2 + x - 6\}$.

$\square$