CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – I PROVA DI ACCERTAMENTO – A – 21/4/2010

Esercizio 1.1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*

b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & | & 1 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-I \\ IV-III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k-4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

- Se $k \neq 1, 2$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3-k}{k+1} - 3 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-2)}{k+1} = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{k+5}{k+1} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases}$$

- Se $k = 2$, allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + (-3, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

- Se $k = 1$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\mathrm{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases}$$

Otteniamo quindi le condizioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} - 2 + \dfrac{1}{3} + 5 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} + 2 + \dfrac{k+2}{3} + k - 1 = 2 \\ -\dfrac{7}{3} + \dfrac{k+2}{3} + 2k - 1 = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Quindi $v \in \mathrm{Sol}(Ax = b)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 1.2. *Siano r la retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e s la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a r e passante per il punto Q di intersezione tra l'asse delle y e il piano contenente r e s.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad r e s e passante per il punto $P = (1, 3, 1)$.*

Soluzione:
Notiamo che la retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e si tratta di una retta parallela ad s.

a) Si tratta di
   – Trovare il piano π passante per r e s,
   – determinare il punto Q intersecando l'asse delle y con il piano π trovato,
   – determinare un'equazione del piano ortogonale a r e passante per Q.

   Poiché r e s sono parallele sono complanari, ma per trovare il piano che le contiene dobbiamo procurarci un'altra direzione. Sia per esempio $C = (1, 1, 1)$ un punto di s, allora $\overrightarrow{CB} = (2, 0, 0)$ e il piano π contenente r e s ha equazioni parametrica e cartesiana date da

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2t + 2s \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad\qquad \pi : \quad y + z = 2$$

   L'asse delle y ha equazione $x = z = 0$, quindi il punto Q è dato da

$$Q : \begin{cases} y + z = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = (0, 2, 0)$$

   Infine il piano cercato ha direzione ortogonale a r, quindi al vettore $(2, -1, 1)$ e passa per $Q = (0, 2, 0)$, quindi

$$\pi' : \quad 2x - y + z = -2$$

b) Una retta perpendicolare ad r e s è perpendicolare al piano π trovato al punto precedente che le contiene. Di conseguenza la retta cercata può essere parallela al vettore $(0, 1, 1)$. Equazioni di tale retta sono quindi:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

□

Esercizio 1.3. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 0, 0, 0),\ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad (k \text{ parametro reale}).$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Soluzione:

a) Per rispondere anche alla domanda c) riduciamo a gradini la matrice $A|b$ in cui A ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la colonna corrispondente al vettore w.

$$\begin{bmatrix} k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ I \\ \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3-k \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo la matrice A:
- Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2\}$.

c) Dalla matrice ridotta notiamo che
- Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \notin V$

b) Per $k = 0$ abbiamo preso come base di V l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Si tratta quindi di aggiungere a questi due vettori altri due vettori in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^4$. A tale scopo possiamo ridurre a gradini la matrice ottenuta affiancando a v_1 e v_2 i vettori della base canonica, in modo da individuare tra questi i vettori da aggiungere. Notiamo però che per $k = 0$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 0, 0)$, quindi evidentemente i vettori della base canonica da aggiungere per ottenere una base di $\mathbf{R}^4$ sono $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Infine la base cercata può essere

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_1, v_2, e_2, e_3\}$$

□

Esercizio 1.4. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A + A^T = 0\right\}.$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che ogni elemento di W ha rango minore di 3.*

Soluzione:

Notiamo che la condizione $A^T = -A$ ci dice che le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
- SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ -x-a & 0 & z+c \\ -y-b & -z-c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ -(x+a) & 0 & z+c \\ -(y+b) & -(z+c) & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda x & \lambda y \\ -\lambda x & 0 & \lambda z \\ -\lambda y & -\lambda z & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Calcoliamo il determinante della generica matrice A di W:

$$\det(A) = -x \cdot (yz) + y \cdot (xz) = -xyz + xyz = 0$$

Poiché il determinante di A è zero, il rango di A è minore di 3.

□

Esercizio 1.5. *Cos'è una* base *di uno spazio vettoriale? Dopo averne dato la definizione, trovare due basi diverse per lo spazio dei polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$.

SOLUZIONE:

Se lo spazio vettoriale è lo spazio nullo, formato dal solo vettore nullo, allora non ha una base. Altrimenti una base di uno spazio vettoriale di V è un insieme di vettori di V che generano tutto lo spazio e che sono linearmente indipendenti. Se V è uno spazio di dimensione finita n su un campo $\mathbf{K}$, allora le due precedenti condizioni si possono così esplicitare: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V se:

- qualsiasi sia $w \in V$, esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{K}$ tali che $w = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$,
- se $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{K}$ sono tali che $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$, allora $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Una possibile base di $\mathbf{R}_3[x]$ è quella canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$; un'altra possibile base è per esempio $\{2, x+1, x^2, x^3 - 3\}$.

□