

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – II PROVA DI ACCERTAMENTO – D – 15/6/2010

Esercizio 1.1. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0)\}$ di \mathbf{R}^4 e sia \mathcal{E} la base canonica di \mathbf{R}^4 . Sia $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ la funzione lineare con matrice associata

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

- a) Stabilire per quali valori di k la funzione T è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).
 b) Posto $k = 2$, si trovi una base del sottospazio $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$, con $W = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$.

SOLUZIONE:

- a) T è un isomorfismo se il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ è 4, infatti in tale caso $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(M) = 4$ e T è suriettiva, e $\dim(\text{N}(T)) = 4 - 4 = 0$ e T è iniettiva. In questo caso è probabilmente più rapido calcolare il determinante di M , sviluppando rispetto alla terza colonna:

$$\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)) = 1 \cdot k \cdot 1 = k$$

Quindi T è un isomorfismo se $k \neq 0$ quando il rango di M è 4.

- b) La matrice associata a T per $k = 2$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo procedere in due modi:

- MODO 1. Esprimiamo i due vettori $w_1 = (1, 0, 0, 1)$ e $w_2 = (0, 1, 0, 1)$ come combinazione lineare delle immagini della base \mathcal{B} risolvendo i due sistemi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_1$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_2$. Riduciamo a gradini le due matrici contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II - I \\ IV - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow 2III - II \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Risolviamo il primo sistema $xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) + wT(v_4) = w_1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y = -1 \\ 2z + 2w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow T^{-1}(w_1) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}} = \left(1, -\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Risolviamo il secondo sistema $xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) + wT(v_4) = w_2$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y = 1 \\ 2z + 2w = -1 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow T^{-1}(w_2) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)_{\mathcal{B}} = \left(1, \frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{2}\right)$$

– MODO 2. Essendo T un isomorfismo possiamo calcolare l'inversa di $M(T)$:

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T))^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(w_1) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) \cdot w_1^T = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}} = \left(1, -\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$T^{-1}(w_2) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) \cdot w_2^T = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)_{\mathcal{B}} = \left(1, \frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{2}\right)$$

□

Esercizio 1.2. Sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 12 & 8 & 2 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
 b) Determinare, se esistono, i valori di k per cui la matrice

$$B = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k-1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

può essere associata al medesimo endomorfismo T .

SOLUZIONE:

- a) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, quindi T ha l'autovalore $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo.

Per stabilire se T è diagonalizzabile cominciamo a calcolare l'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} -6 & -3 & -1 \\ 12 & 6 & 2 \\ -6 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -6x - 3y - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -6t - 3s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(2) = \langle (1, 0, -6), (0, 1, -3) \rangle$$

A questo punto possiamo già dire che T è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio $E(1)$:

$$E(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 12 & 7 & 2 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II + 2I \\ -1/3III \end{array} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} III - II \end{array} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (1, -2, 1) \rangle$$

Infine la matrice P diagonalizzante (formata da una base di autovettori) è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

- b) Dal momento che A è diagonalizzabile con autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo, A e B sono associate allo stesso endomorfismo T se anche B ha le stesse caratteristiche. Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico di B :

$$p_B(\lambda) = (k - \lambda)(2 - \lambda)(2 - \lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori se $k = 1$. Dobbiamo ora verificare che, per $k = 1$, anche B sia diagonalizzabile, ovvero che $\lambda = 2$ abbia molteplicità geometrica 2:

$$E_B(2) = N(B - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2, quindi B è diagonalizzabile e A e B sono associate al medesimo endomorfismo T per $k = 1$. □

Esercizio 1.3. Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3, x_2, x_1 + 2x_3, x_4).$$

- a) Mostrare che T è diagonalizzabile.
- b) Se esiste, trovare una base ortonormale di \mathbf{R}^4 formata da autovettori di T ?

SOLUZIONE:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^4 è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) T è simmetrica, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- b) Essendo T simmetrica esiste una base ortonormale di \mathbf{R}^4 formata da autovettori di T . Calcoliamo il polinomio caratteristico di T :

$$p_M(\lambda) = (1 - \lambda)^2[(2 - \lambda)^2 - 1] = (1 - \lambda)^3(3 - \lambda)$$

T ha autovalori $\lambda = 1$, triplo, e $\lambda = 3$, singolo. Calcoliamo i due autospazi:

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(3) = \langle (1, 0, 1, 0) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \rangle$$

Analogamente

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -t \\ w = r \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(1) = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

Notiamo che i tre vettori di $E(1)$ trovati sono ortogonali tra loro, quindi è sufficiente normalizzarli:

$$E(1) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

Infine una base ortonormale formata da autovettori cercata è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \right\}$$

□

Esercizio 1.4. Sia \mathbf{C} la conica di equazione

$$\mathbf{C} : 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x - 1 = 0.$$

- a) Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di \mathbf{C} .
- b) Trovare equazioni degli assi di simmetria di \mathbf{C} .

SOLUZIONE:

a) Le matrici associate alla conica sono

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

- $I_3 = \det(\tilde{A}) = -56$, e si tratta di una conica non degenera.
- $p_A(\lambda) = (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 5y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(\tilde{A})$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(\tilde{A}) = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-56 = 50t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{28}{25}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$10x^2 + 5y^2 - \frac{28}{25} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{125}{14}x^2 + \frac{125}{28}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta di un'ellisse reale.

b) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A|h$:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 1 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 3I \begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 1 \\ -25 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{25} \\ y = -\frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{3}{25}, -\frac{1}{25}\right)$$

Calcoliamo gli autospazi di A :

$$E(10) = N(A - 10I) : \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y = 0$$

$$E(5) = N(A - 5I) : \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0$$

Infine gli assi hanno la direzione degli autovettori e passano per il centro C :

$$a_1 : x - 2y = \frac{1}{5} \qquad a_2 : 2x + y = \frac{1}{5}$$

□

Esercizio 1.5. *Cos'è il nucleo di una funzione lineare? Dopo averne dato la definizione, dare un esempio di funzione lineare definita sullo spazio \mathbf{R}^3 con nucleo contenente vettori non nulli.*