CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – II PROVA DI ACCERTAMENTO – C – 15/6/2010

Esercizio 1.1. *Si consideri la base* $\mathcal{B} = \{(0,0,1,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0)\}$ *di* $\mathbf{R}^4$ *e sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$*. Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *la funzione lineare con matrice associata*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con k *parametro reale.*

a) *Stabilire per quali valori di* k *la funzione* T *è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).*
b) *Posto* $k = 1$*, si trovi una base del sottospazio* $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$*, con* $W = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,1)\rangle$*.*

SOLUZIONE:

a) T è un isomorfismo se il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ è 4, infatti in tale caso $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 4$ e T è suriettiva, e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$ e T è iniettiva. In questo caso è probabilmente più rapido calcolare il determinante di M, sviluppando rispeto alla terza colonna:

$$\det\left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right) = 1 \cdot k \cdot 1 = k$$

Quindi T è un isomorfismo se $k \neq 0$ quando il rango di M è 4.

b) La matrice associata a T per $k = 1$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo procedere in due modi:

– MODO 1. Esprimiamo i due vettori $w_1 = (1,0,0,1)$ e $w_2 = (0,1,0,1)$ come combinazione lineare delle immagini della base $\mathcal{B}$ risolvendo i due sistemi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_1$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_2$. Riduciamo a gradini le due matrici contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow III - II \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Risolviamo il primo sistema $xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) + wT(v_4) = w_1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow T^{-1}(w_1) = (1,-1,1,0)_{\mathcal{B}} = (-1,0,2,1)$$

Risolviamo il secondo sistema $xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) + wT(v_4) = w_2$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z + w = -1 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow T^{-1}(w_2) = (0,1,-2,1)_{\mathcal{B}} = (2,-1,-1,0)$$

– MODO 2.Essendo T un isomorfismo possiamo calcolare l'inversa di $M(T)$:

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right)^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$T^{-1}(w_1) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) \cdot w_1^T = (1,-1,1,0)_{\mathcal{B}} = (-1,0,2,1)$$
$$T^{-1}(w_2) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1}) \cdot w_2^T = (0,1,-2,1)_{\mathcal{B}} = (2,-1,-1,0)$$

□

Esercizio 1.2. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*
b) *Determinare, se esistono, i valori di k per cui la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & k+1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

può essere associata al medesimo endomorfismo T.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, quindi T ha l'autovalore $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo.

Per stabilire se T è diagonalizzabile cominciamo a calcolare l'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I): \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 1 & -6 & -3 \\ -2 & 12 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+6y+3z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6t+3s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(2) = \langle\ (6,1,0),\ (3,0,1)\rangle$$

A questo punto possiamo già dire che T è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio $E(1)$:

$$E(1) = \mathrm{N}(A-I): \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -2 & 12 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (-1,1,-2)\rangle$$

Infine la matrice P diagonalizzante (formata da una base di autovettori) è

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Dal momento che A è diagonalizzabile con autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo, A e B sono associate allo stesso endomorfismo T se anche B ha le stesse caratteristiche. Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)(k+1-\lambda)(2-\lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori se $k = 1$. Dobbiamo ora verificare che, per $k = 1$, anche B sia diagonalizzabile, ovvero che $\lambda = 2$ abbia molteplicità geometrica 2:

$$E_B(2) = \mathrm{N}(B-2I): \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1, quindi B non è diagonalizzabile e A e B non sono associate al medesimo endomorfismo T per nessun valore di k.

$\square$

Esercizio 1.3. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2 + x_4, x_3, x_2 + 2x_4).$$

a) *Mostrare che T è diagonalizzabile.*
b) *Se esiste, trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T?*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$ è

$$M = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) T è simmetrica, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
b) Essendo T simmetrica esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T. Calcoliamo il polinomio caratteristico di T:

$$p_M(\lambda) = (1-\lambda)^2[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)^3(3-\lambda)$$

T ha autovalori $\lambda = 1$, triplo, e $\lambda = 1$, singolo. Calcoliamo i due autospazi:

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(3) = \langle\ (0,1,0,1)\ \rangle = \langle\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \rangle$$

Analogamente

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = r \\ w = -s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(1) = \langle\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,0)\ \rangle$$

Notiamo che i tre vettori di $E(1)$ trovati sono ortogonali tra loro, quindi è sufficiente normalizzarli:

$$E(1) = \langle\ (1,0,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (0,0,1,0)\ \rangle$$

Infine una base ortonormale formata da autovettori cercata è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (0,0,1,0) \right\}$$

$\square$

Esercizio 1.4. *Sia $\mathbf{C}$ la conica di equazione*

$$\mathbf{C}\ :\ 6x^2 + 4xy + 9y^2 + 4 = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di $\mathbf{C}$.*
b) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di $\mathbf{C}$.*

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
– $I_3 = \det(\tilde{A}) = 4(54 - 4) = 200$, e si tratta di una conica non degenere.

– $p_A(\lambda) = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 5y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(\tilde{A})$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(\tilde{A}) = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$200 = 50t \quad \Rightarrow \quad t = 4$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$10x^2 + 5y^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}y^2 + 1 = 0$$

Notiamo che si tratta di un ellisse immaginaria.

b) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & | & 0 \\ 2 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; C(0,0)$$

Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(10) = N(A - 10I) : \; \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \; 2x - y = 0$$

$$E(5) = N(A - 5I) : \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \; x + 2y = 0$$

Infine gli assi hanno la direzione degli autovettori e passano per il centro $C(0,0)$:

$$a_1 : \; 2x - y = 0 \qquad\qquad a_2 : \; x + 2y = 0$$

□

Esercizio 1.5. *Cos'è un* autovalore *di una matrice? Dopo averne dato la definizione, dare un esempio di* autovalore *di una matrice reale* 3×3.