

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA**

GEOMETRIA – APPELLO DEL 07/09/2010 – A –

**Esercizio 1.1.** Si consideri il piano  $\pi$  di equazione  $2x + y - z = 0$ .

- a) Determinare la retta  $r$  ortogonale a  $\pi$  passante per il punto  $A(1, 1, 0)$  e trovare il punto di intersezione  $B = r \cap \pi$ .
- b) Tra i piani ortogonali a  $\pi$  e passanti per l'origine, determinare quello passante per  $A$ .

SOLUZIONE:

- a) La retta  $r$  ha direzione  $(2, 1, -1)$ , quindi equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Inoltre

$$B = r \cap \pi = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ 2 + 4t + 1 + t + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- b) Un piano ortogonale a  $\pi$  è parallelo alla retta  $r$ , ovvero alla direzione  $(2, 1, -1)$ . Contenendo l'origine e il punto  $A$ , è anche parallelo a  $OA = (1, 1, 0)$ . Di conseguenza il piano cercato ha equazioni

$$\begin{cases} x = 2t + s \\ y = t + s \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x - y + z = 0$$

□

**Esercizio 1.2.** Si considerino la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e l'insieme  $V = \{B \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid AB = 0\}$ .

- a) Dimostrare che  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $M_{3,3}(\mathbf{R})$ .
- b) Determinare la dimensione e una base di  $V$ .

SOLUZIONE:

- a)  $V$  è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, infatti:
  - SOMMA. Se  $B_1$  e  $B_2$  appartengono a  $V$ , allora  $AB_1 = AB_2 = 0$ ; di conseguenza  $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = 0$  e anche  $B_1 + B_2$  appartiene a  $V$ .
  - PRODOTTO. Se  $B \in V$  e  $\alpha \in \mathbf{R}$ , allora  $(\alpha B)A = \alpha(BA) = 0$ , quindi anche  $\alpha B$  appartiene a  $V$ .
- b) Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

la generica matrice di  $M_{3,3}(\mathbf{R})$ . Di conseguenza:

$$AB = \begin{bmatrix} b_{1,1} + 2b_{2,1} + b_{3,1} & b_{1,2} + 2b_{2,2} + b_{3,2} & b_{1,3} + 2b_{2,3} + b_{3,3} \\ b_{1,1} + 2b_{2,1} & b_{1,2} + 2b_{2,2} & b_{1,3} + 2b_{2,3} \\ 3b_{3,1} & 3b_{3,2} & 3b_{3,3} \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione  $AB = 0$  otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} b_{1,1} + 2b_{2,1} = 0 \\ b_{1,2} + 2b_{2,2} = 0 \\ b_{1,3} + 2b_{2,3} = 0 \\ b_{3,1} = b_{3,2} = b_{3,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{1,1} = -2t \\ b_{2,1} = t \\ b_{1,2} = -2s \\ b_{2,2} = s \\ b_{1,3} = -2h \\ b_{2,3} = h \\ b_{3,1} = b_{3,2} = b_{3,3} = 0 \end{cases} \quad \forall t, s, h \in \mathbf{R}$$

Infine le matrici  $B$  di  $V$  sono del tipo

$$B = \begin{bmatrix} -2t & -2s & -2h \\ t & s & h \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot h$$

Le tre matrici

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano tutto  $V$ , quindi  $\dim(V) = 3$  e una base di  $V$  è  $\{B_1, B_2, B_3\}$ .  $\square$

**Esercizio 1.3.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, 1, 1), \quad v_2 = (1, k+2, 1, 1), \quad v_3 = (0, k, 0, k), \quad v_4 = (0, 0, k-1, k-1)$$

e  $w = (1, k+2, k+1, 1)$ , con  $k$  parametro reale, e sia  $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ .

- Determinare la dimensione e una base di  $V$  al variare di  $k$ .
- Stabilire per quali  $k$  il vettore  $w$  appartiene a  $V$  e in tali casi trovarne le coordinate rispetto alla base di  $V$  trovata al punto precedente.

SOLUZIONE:

Per rispondere ad entrambe le domande, riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione vettoriale  $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = w$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & k+2 & k & 0 & k+2 \\ 1 & 1 & 0 & k-1 & k+1 \\ 1 & 1 & k & k-1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II - 2I \\ III - I \\ IV - III \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} IV \\ III \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k \end{array} \right]$$

- Consideriamo la matrice dei coefficienti. Dobbiamo distinguere tre casi:
  - Se  $k \neq 0, 1$ , lo spazio  $V$  ha dimensione 4 e una base di  $V$  è  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .
  - Se  $k = 0$ , lo spazio  $V$  ha dimensione 2 e una base di  $V$  è  $\mathcal{B} = \{v_1, v_4\}$ .
  - Se  $k = 1$ , lo spazio  $V$  ha dimensione 3 e una base di  $V$  è  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ .
- Consideriamo ora la matrice completa, distinguendo i tre casi evidenziati al punto precedente:
  - Se  $k \neq 0, 1$ , abbiamo visto che  $V = \mathbf{R}^4$ , quindi  $w \in V$ . Risolviamo il sistema, ridotto, associato all'equazione  $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = w$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ kx_2 + kx_3 = k \\ kx_3 = -k \\ (k-1)x_4 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = \frac{k}{k-1} \end{cases} \Rightarrow w = \left( -1, 2, -1, \frac{k}{k-1} \right)_{\mathcal{B}} \quad \text{con } \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

- Se  $k = 0$ , il rango della matrice completa e incompleta coincidono, quindi  $w \in V$ . Poiché in questo caso la base individuata è  $\{v_1, v_4\}$ , consideriamo il sistema formato dalla prima e quarta colonna, associato all'equazione  $x_1v_1 + x_4v_4 = w$ :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow w = (1, 0)_{\mathcal{B}} \quad \text{con } \mathcal{B} = \{v_1, v_4\}$$

- Se  $k = 1$ , la matrice completa ha rango 3, mentre quella dei coefficienti ha rango 2, quindi  $w \notin V$ .

$\square$

**Esercizio 1.4.** Sia  $T : \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_2[x]$  la funzione lineare definita da

$$T(p(x)) = p(1) - p(2)x + 2p(-1)x^2.$$

- a) Determinare la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2, x + x^3\}$  nel dominio e  $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2 + 1\}$  nel codominio.  
 b) Determinare il nucleo e l'immagine di  $T$ .

SOLUZIONE:

a) Consideriamo i vettori della base dello spazio di partenza e la definizione di  $T$ :

$$\begin{aligned} p_1(x) = 1 + x &\Rightarrow p_1(1) = 2 & p_1(2) = 3 & p_1(-1) = 0 &\Rightarrow T(p_1(x)) = 2 - 3x \\ p_2(x) = 1 - x &\Rightarrow p_1(1) = 0 & p_1(2) = -1 & p_1(-1) = 2 &\Rightarrow T(p_2(x)) = x + 4x^2 \\ p_3(x) = x^2 &\Rightarrow p_1(1) = 1 & p_1(2) = 4 & p_1(-1) = 1 &\Rightarrow T(p_3(x)) = 1 - 4x + 2x^2 \\ p_4(x) = x + x^3 &\Rightarrow p_1(1) = 2 & p_1(2) = 10 & p_1(-1) = -2 &\Rightarrow T(p_4(x)) = 2 - 10x - 4x^2 \end{aligned}$$

Si tratta ora di esprimere i polinomi immagine ottenuti come combinazione lineare dei polinomi della base dello spazio di arrivo  $\mathcal{B}' = \{q_1(x) = 1, q_2(x) = x, q_3(x) = x^2 + 1\}$

$$\begin{aligned} T(p_1(x)) = 2 - 3x &= 2q_1(x) - 3q_2(x) = (2, -3, 0)_{\mathcal{B}'} \\ T(p_2(x)) = x + 4x^2 &= -4q_1(x) + q_2(x) + 4q_3(x) = (-4, 1, 4)_{\mathcal{B}'} \\ T(p_3(x)) = 1 - 4x + 2x^2 &= -q_1(x) - 4q_2(x) + 2q_3(x) = (-1, -4, 2)_{\mathcal{B}'} \\ T(p_4(x)) = 2 - 10x - 4x^2 &= 6q_1(x) - 10q_2(x) - 4q_3(x) = (6, -10, -4)_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Infine la matrice associata a  $T$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo a gradini la matrice trovata al punto precedente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2II + 3I \\ 1/2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & -10 & -11 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5III + II \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & -10 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

L'immagine di  $T$  è lo spazio generato dai tre polinomi, linearmente indipendenti, corrispondenti alle prime tre colonne della matrice:

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{2 - 3x, x + 4x^2, 1 - 4x + 2x^2\}$$

Il nucleo dell'immagine di  $T$  è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ :

$$\begin{cases} 2x - 4y - z + 6w = 0 \\ -10y - 11z - 2w = 0 \\ -6z - 12w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = -2t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \text{N}(T) = \langle (0, 2, -2, 1)_{\mathcal{B}} \rangle$$

Tornando ai polinomi:

$$(0, 2, -2, 1)_{\mathcal{B}} = 2p_2(x) - 2p_3(x) + p_4(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3$$

quindi una base del nucleo di  $T$  è

$$\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{2 - x - 2x^2 + x^3\}$$

□

**Esercizio 1.5.** Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^4$  con matrice associata rispetto alla base canonica:

$$A = M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 2 - k & -k & 0 \\ -1 & k & k - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 - k & -k & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Mostrare che il vettore  $v = (1, 0, 0, 1)$  è autovettore di  $T$ . Trovare gli autovalori di  $T$ .  
 b) Stabilire se esistono valori del parametro reale  $k$  per i quali l'endomorfismo è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

- a) Per verificare che  $v$  è autovettore di  $T$  dobbiamo stabilire se esiste un numero  $\lambda \in \mathbf{R}$  tale che  $T(v) = A \cdot v^t = \lambda v$ :

$$T(v) = A \cdot v^t = \begin{bmatrix} 2 & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 2] = 2 \cdot v$$

quindi  $v$  è autovettore di  $T$  rispetto all'autovalore  $\lambda = 2$ .

Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k-\lambda & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(k-\lambda)$$

Infine gli autovalori di  $T$  sono:  $\lambda = 1$ , almeno doppio,  $\lambda = 2$  e  $\lambda = k$ .

- b) Per stabilire se  $T$  è diagonalizzabile bisogna determinare la molteplicità geometrica degli autovalori.

$$E(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} 1 & 2-k & -k & 0 \\ -1 & k-1 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II + I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2-k & -k & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim(E(1)) = \dim(N(A - I)) = 4 - \text{rg}(A - I) = 2$$

A questo punto possiamo affermare che

- Se  $k \neq 1, 2$ , allora  $\text{m.a.}(1) = \text{m.g.}(1) = 2$  e  $\lambda = k$  e  $\lambda = 2$  sono autovalori singoli, quindi  $T$  è diagonalizzabile.
- Se  $k = 1$ , allora  $\text{m.a.}(1) = 3 \neq \text{m.g.}(1) = 2$  quindi  $T$  non è diagonalizzabile.

Resta da considerare il caso  $k = 2$ , quando  $\lambda = 2$  è doppio. In questo caso

$$E(2) = N(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II \\ I \\ IV + II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi  $\text{rg}(A - 2I) = 2$  e  $\dim(E(2)) = \dim(N(A - 2I)) = 4 - 2 = 2$ ; di conseguenza per  $k = 2$  anche la molteplicità geometrica di  $\lambda = 2$  è 2.

Infine se  $k = 2$ , i due autovalori doppi  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$  hanno molteplicità geometrica 2, quindi anche in questo caso  $T$  è diagonalizzabile.

In conclusione  $T$  è diagonalizzabile per ogni  $k \neq 1$ .

□

**Esercizio 1.6.** Sia  $C$  la conica di equazione  $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ .

- a) Si determini il tipo di conica e la sua forma canonica.
- b) Si trovi l'eventuale centro della conica e, se esistono, i punti all'infinito di  $C$ .
- c) Si trovino gli assi di simmetria della conica.

SOLUZIONE:

- a) La matrice associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -5 \neq 0$$

e si tratta di una conica non degenera. Inoltre

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

quindi si tratta di una conica a centro, in particolare di un'ellisse.

Per trovare la forma canonica calcoliamo gli autovalori di  $A$ :

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

quindi gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda = 1, 6$ . In effetti, poiché gli autovalori sono concordi, si tratta di un'ellisse. La forma canonica cercata è quindi del tipo  $x^2 + 6y^2 + t = 0$ , a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione  $\det(A) = \det(B)$  otteniamo  $t = -\frac{5}{6}$ . Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + 6y^2 - \frac{5}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5}x^2 + \frac{36}{5}y^2 - 1 = 0$$

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema  $A| - h$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow II - I \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C \left( -\frac{7}{6}, \frac{2}{3} \right)$$

Inoltre, essendo un'ellisse, non ha punti all'infinito.

c) Per trovare gli assi di simmetria calcoliamo gli autospazi di  $A$ :

$$E(1) = N(A - I) : \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (-2, 1) \rangle$$

$$E(6) = N(A - 6I) : \left[ \begin{array}{cc} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle (1, 2) \rangle$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro, di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{7}{6} - 2t \\ y = \frac{2}{3} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{1}{6}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{7}{6} + t \\ y = \frac{2}{3} + 2t \end{cases} \Rightarrow 2x - y = -3$$

□