CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

GEOMETRIA – APPELLO DEL 28/6/2010 – B –

Esercizio 1.1. *Si considerino il piano π_1 di equazione $x - y + 3z = 0$ e la retta r di equazione cartesiana*

$$r: \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

a) *Determinare un'equazione cartesiana del piano π_2 contenente r e il punto $A(0, 2, -1)$; determinare inoltre un'equazione parametrica della retta intersezione tra π_1 e π_2.*
b) *Determinare equazione parametrica e cartesiana del piano π_3 ortogonale a π_1 e π_2 passante per il punto $B(2, 1, -2)$.*

Soluzione:

La retta r ha equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi due suoi punti sono per esempio $P(1, 0, -1)$ e $Q(1, 1, -1)$.

a) Il piano π_2 passa per i punti A, P e Q. Poiché $\overrightarrow{AP} = (1, -2, 0)$ e $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0)$, il piano π_2 ha equazione parametrica

$$\pi_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t + s \\ z = -1 \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

e l'equazione cartesiana di π_2 è $z = -1$.

Per trovare la retta s intersezione di π_1 e π_2 risolviamo il sistema

$$s = \pi_1 \cap \pi_2: \quad \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) Il piano π_3 ortogonale a π_1 e π_2 è anche ortogonale a $s = \pi_1 \cap \pi_2$, quindi al vettore $(1, 1, 0)$. Di conseguenza π_3 è del tipo $x + y = d$. Imponendo il passaggio per B, otteniamo $\pi_3: \ x + y = 3$.

$\square$

Esercizio 1.2. *Sia A la matrice reale $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.*

a) *Determinare tutte le matrici $M \in M_2(\mathbf{R})$ di tipo 2×2 tali che $MA = AM$.*
b) *Mostrare che l'insieme S delle matrici trovate in a) forma un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione.*

Soluzione:

a) Sia $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la generica matrice di $M \in M_2(\mathbf{R})$. Di conseguenza:

$$MA = \begin{bmatrix} 3x + y & 2x + y \\ 3z + w & 2z + w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AM = \begin{bmatrix} 3x + 2z & 3y + 2w \\ x + z & y + w \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $MA = AM$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 3x + 2z \\ 2x + y = 3y + 2w \\ 3z + w = x + z \\ 2z + w = y + w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ 2x - 2y - 2w = 0 \\ x - 2z - w = 0 \\ 2z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x - y - w = 0 \\ x - y - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + s \\ y = 2t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Quindi M è del tipo

$$M = \begin{bmatrix} 2t+s & 2t \\ t & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot s$$

b) L'insieme S delle matrici che commutano con A è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbf{R})$ in quanto:
   – è chiuso rispetto alla somma: se M_1 e M_2 appartengono a S, quindi commutano con A, allora

$$(M_1 + M_2)A = M_1A + M_2A = AM_1 + AM_2 = A(M_1 + M_2)$$

   Di conseguenza anche $M_1 + M_2$ appartiene a S.
   – è chiuso rispetto al prodotto per scalari: se M appartiene a S, quindi commuta con A, e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora

$$(\lambda M)A = \lambda(MA) = \lambda(AM) = A(\lambda M).$$

   Di conseguenza anche λM appartiene a S.

La dimostrazione si poteva anche fare uilizzando la scrittura esplicita di M trovata al punto precedente.

Abbiamo trovato al punto a) che

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Poiché le due matrici $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti (non sono una multiplo dell'altra), l'insieme $\{C,\ I\}$ forma una base di S che di conseguenza ha dimensione 2.

□

Esercizio 1.3. *Si consideri l'insieme $\mathcal{S}$ costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (0, 1, 2, 1), v_2 = (2, 1, 2, 1), v_3 = (1, 2, 2, 1).$$

a) *È possibile estendere $\mathcal{S}$ a una base di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente $\mathcal{S}$.*

Soluzione:

a) $\mathcal{S}$ può essere esteso a una base di $\mathbf{R}^4$ se $v_1,\ v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti. Per rispondere ad entrambe le domande, riduciamo a gradini la matrice A formata dai vettori colonna $v_1,\ v_2$ e v_3 affiancata, per semplicità, dalla matrice identica I_4.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ I \\ II \\ III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ IV - 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

La matrice A ha rango 3, quindi i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti e l'insieme S può essere esteso ad un base di $\mathbf{R}^4$.

b) La matrice formata dalle prime tre colonne e dalla sesta, oppure dalla settima, ha rango 4, quindi i vettori corrispondenti formano una base di $\mathbf{R}^4$. Una base di $\mathbf{R}^4$ contenente $\mathcal{S}$ è quindi

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_3 = (0, 0, 1, 0)\} \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_4 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

□

Esercizio 1.4. *Dati i vettori $v_1 = (2, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$, sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che $T(v_1) = v_3,\ T(v_2) = v_1$ e $T(v_3) = v_2$.*

a) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.*
b) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base canonica.*
c) *Determinare il nucleo di T e trovare (se esiste) una controimmagine di $(5, 1, -11)$.*

Soluzione:

a) Dalla definzione di T si ha

$$T(v_1) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_2) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$$

quindi la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Senza la necessità di impostare un sistema è facile scrivere gli elementi della base canonica come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$ e quindi trovarne l'immagine attraverso a T:

$$\begin{aligned}
&e_1 = \frac{1}{2}v_1 && \Rightarrow && T(e_1) = \frac{1}{2}T(v_1) = \frac{1}{2}v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&e_2 = v_2 - \frac{1}{2}v_1 && \Rightarrow && T(e_2) = T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_1) = v_1 - \frac{1}{2}v_3 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
&e_3 = v_3 - v_2 && \Rightarrow && T(e_3) = T(v_3) - T(v_2) = v_2 - v_1 = (-1, 1, 0)
\end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

c) È immediato verificare che $\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)\right) = 1$, quindi $\text{rg}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)\right) = \text{rg}(M(T)) = 3$. Di conseguenza $\dim(N(T)) = 0$ e $N(T) = \{\ (0,0,0)\ \}$.

T è suriettiva, quindi esiste una controimmagine per ogni elemento di $\mathbf{R}^3$. Per trovare una controimmagine di $v = (5, 1, -11)$ ci conviene forse usare la matrice $M(T)$ risolvendo il sistema $M(T)|v$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -11 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 2I \\ II - I \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 10 \\ -y + z = -2 \\ z = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 14 \\ z = 12 \end{cases}$$

Quindi $T(-8, 14, 12) = (5, 1, -11)$ e la controimmagine di v è $(-8, 14, 12)$.

$\square$

Esercizio 1.5. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Stabilire se T è diagonalizzabile.

Soluzione:

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

Risolvendo l'equazione $p_A(\lambda) = 0$ troviamo che T ha come autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, entrambi con molteplicità algebrica 2. Per stabilire se T è diagonalizzabile bisogna determinare la molteplicità geometrica di entrambi gli autolvalori.

$$E(1) = \text{N}(A - I) : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV - III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $\text{rg}(A - I) = 2$ e $\dim(E(1)) = \dim(\text{N}(A - I)) = 4 - 2 = 2$; di conseguenza la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è 2.

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-2II \\ IV-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathrm{rg}(A-2I) = 2$ e $\dim(E(2)) = \dim(\mathrm{N}(A-2I)) = 4-2 = 2$; di conseguenza anche la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2.

Poiché entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 2, l'endomorfismo T è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 1.6. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (0,1,-1,0), \quad v_2 = (2,2,-1,t) \quad (t \text{ parametro reale}).$$

a) *Si determini il valore di t tale che v_1 e v_2 formino un angolo di $45°$.*
b) *Posto $t = 0$ si determini la proiezione di v_2 su v_1.*
c) *Posto $t = 0$ e dato $v_3 = (0,1,0,1)$, si determini una base ortonormale dello spazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo formato da v_1 e v_2. Si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9+t^2}}$$

Poiché $\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ otteniamo l'equazione

$$\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9+t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{9+t^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = \sqrt{9+t^2} \quad \Rightarrow \quad 9 = 9+t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Quindi v_1 e v_2 formano un angolo di $45°$ se $t = 0$.

b) La proiezione di v_2 su v_1 è

$$\mathrm{pr}_{v_1}(v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_1, v_1)} \cdot v_1 = \frac{3}{2} \cdot (0,1,-1,0) = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

c) Cerchiamo prima una base ortogonale w_1, w_2, w_3.

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_2) = (2,2,-1,0) - \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow w_2 = (4,1,1,0)$$

$$w_3 = v_3 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_3) - \mathrm{pr}_{w_2}(v_3) = (0,1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,-1,0) - \frac{1}{18}(4,1,1,0) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, 1\right) \Rightarrow$$

$w_3 = (-2,4,4,9)$

Per trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di V si tratta ora di determinare i generatori di norma 1:

$$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$$
$$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{1}{\sqrt{18}}(4,1,1,0) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,1,0)$$
$$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{1}{\sqrt{117}}(-2,4,4,9)$$

$\square$