CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

ENDOMORFISMI SIMMETRICI E TEOREMA SPETTRALE – GEOMETRIA 2008/09

Endomorfismo simmetrico: $T : V \rightarrow V$ tale che:

$$(T(u), v) = (u, T(v)) \qquad \forall u, v \in V$$

PROPRIETÀ :

Se T è un endomorfismo e A è la matrice associata a T rispetto a una **base ortonormale**, allora:

- T è simmetrico $\Leftrightarrow$ A è simmetrica (cioè $A = A^T$).
- T ha n autovalori reali (contati con la loro molteplicità).
- Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Matrice ortogonale: P è una matrice ortogonale se

$$P \cdot P^T = I \quad \text{ovvero} \quad P^{-1} = P^T$$

Notiamo che $\det(P) = \pm 1$, e P è detta ortogonale speciale se $\det(P) = 1$.

Teorema spettrale

- Se T è un endomorfismo simmetrico di V, allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T. In particolare T è diagonalizzabile, cioè esiste una base (ortonormale) di V rispetto alla quale la matrice associata a T è diagonale.
- Se A è una matrice simmetrica, allora A è simile a una matrice diagonale D (ovvero A è diagonalizzabile). Inoltre la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$