CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

I PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA D – GEOMETRIA – 17/04/2009

Esercizio 0.1. *Si consideri il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} -x+5z=1 \\ x+(k+4)y+5z=1 \\ -3x+(k+14)z=2 \\ -x+(k+4)z=0 \end{cases}$$

con k parametro reale.

(a) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*
(b) *Si trovino esplicitamente le soluzioni del sistema quando questo ammette infinite soluzioni.*

SOLUZIONE:
Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 1 & k+4 & 5 & | & 1 \\ -3 & 0 & k+14 & | & 2 \\ -1 & 0 & k+4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-3I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & k+4 & 10 & | & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & | & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & k+4 & 10 & | & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, -4$ allora $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette un'unica soluzione;
   – Se $k = -4$ otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 10 & | & 2 \\ 0 & 0 & -5 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II \\ 2III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   Di conseguenza $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni;
   – Se $k = 1$ allora $\text{rg}(A) = 2$ mentre $\text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzioni.

   In conclusione il sistema ha soluzione per ogni $k \neq 1$.

b) Risolviamo il sistema per $k = -1$

$$\begin{cases} -x+5z=1 \\ 5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{5} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i punti $A = (1, 2, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-3, 0, 1)$.*

a) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche del piano π passante per i punti A, B, C.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane della retta r passante per $D = (2, 2, 0)$ e ortogonale a π.*
c) *Sia s la retta passante per i punti B e C. Stabilire la posizione reciproca fra r e s (rette parallele, incidenti, sghembe...).*

SOLUZIONE:

a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0), \quad \overrightarrow{BC} = (-3, -1, 1)$$

otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = -t - 3s \\ y = 1 - t - s \\ z = s \end{cases} \qquad \forall\, t, s \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad x - y + 2z = -1$$

b) La retta ortogonale a π ha direzione parallela a $(1, -1, 2)$. Imponendo il passaggio per D otteniamo

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$$

c) La retta s ha equazione cartesiana

$$s : \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che r e s non sono parallele. Mettendo a sistema l'equazione cartesiana di r con quella parametrica di s otteniamo:

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ x + y = 4 \\ 2x - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ -3t + 1 - t = 4 \\ -6t - t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ -4t = 3 \\ -7t = 4 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e r e s sono sghembe.

□

Esercizio 0.3. *Si considerino i punti del piano* $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,2t)$ *e* $A' = (1,-1)$, $B' = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C' = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

a) *Per quali valori di* t *esiste un'isometria diretta che trasforma i punti* A, B, C *nei punti* A', B', C' *rispettivamente?*
b) *Per i valori di* t *determinati al punto precedente, trovare le equazioni dell'isometria.*
c) *Stabilire se l'isometria* f *in* b) *ha dei punti fissi, cioè tali che* $f(P) = P$.

Soluzione:

a) Un'isometria conserva le distanze, quindi:

$$|AB| = |A'B'| \;\Rightarrow\; 1 = 1$$
$$|AC| = |A'C'| \;\Rightarrow\; |2t| = 1 \;\Rightarrow\; t = \pm\frac{1}{2}$$
$$|BC| = |B'C'| \;\Rightarrow\; \sqrt{1 + 4t^2} = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; t = \pm\frac{1}{2}$$

Di conseguenza perché esista un'isometria deve essere $t = \pm\frac{1}{2}$. Inoltre rappresentando i punti si vede che l'isometria è diretta per $t > 0$, quindi esiste un'isometria diretta che trasforma i punti A, B, C nei punti A', B', C' rispettivamente, per $t = \frac{1}{2}$.

In alternativa per rispondere alla domanda a) si poteva impostare il sistema relativo alla generica isometria diretta:

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \\ f(C) = C \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

b) Sia

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

la generica isometria diretta. Imponendo le condizioni $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$ (con $t = \frac{1}{2}$) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ -1 = b \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = c + 1 \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = s - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ s = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta di una rotazione oraria pari ad un angolo di 45°.

c) Imponendo al generico punto $P(x, y)$ la condizione $P' = f(P) = P$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}y = 2 \\ \sqrt{2}x + (2 - \sqrt{2})y = -2 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Infine il punto fisso dell'isometria (centro di rotazione) è $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

□

Esercizio 0.4. *Siano assegnati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (-3, -3, 3, 6),\ v_2 = (-1, 1, 1, 2),\ v_3 = (0, 1, 1, 0),\ v_4 = (0, 0, 1, k - 2),\ v_5 = (1, 1, 1, -2)$$

con k parametro reale.

(a) *Si stabilisca per quali valori di k il sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ coincide con $\mathbf{R}^4$.*
(b) *Per i valori trovati al punto precedente si esprimano le coordinate di v_5 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbf{R}^4$.*

Soluzione:

Lo spazio $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ coincide con $\mathbf{R}^4$ se $\dim(V) = 4$, cioè se il rango della matrice associata a v_1, v_2, v_3, v_4 è 4. Inoltre, in tali casi, le coordinate di v_5 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono date dalla soluzione dell'equazione $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = v_5$. Per rispondere a entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai primi quattro vettori, con il vettore v_5 come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 6 & 2 & 0 & k-2 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III + I \\ IV + 2I \end{array} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) I quattro vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti e quindi $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathbf{R}^4$ se $k \neq 2$
b) Dalla matrice ridotta, con $k \neq 2$, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -3x - y = 1 \\ 2y + z = 0 \\ z + w = 2 \\ (k-2)w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine $v_5 = -v_2 + 2v_3$ ovvero v_5 ha coordinate $(0, -1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbf{R}^4$.

□

Esercizio 0.5. *Sia W il sottoinsieme dello spazio di polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(2) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Trovare una base e la dimensione di W.*
c) *Determinare le coordinate del polinomio $p(x) = -x^2 + x + 2 \in W$ rispetto alla base trovata al punto b).*

Soluzione:

a) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo innanzitutto verificare che W è un sottoinsieme di $\mathbf{R}_2[x]$. In effetti la condizione $p''' = 0$ applicata al generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$ diventa $6a = 0$. Quindi se $p(x) \in W$ deve essere del tipo $p(x) = bx^2 + cx + d$ cioè un elemento di $\mathbf{R}_2[x]$. Inoltre W può essere riscritto

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(2) = 0\}$$

Per dimostrare ora che si tratta di un sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

– W è chiuso rispetto alla somma, infatti presi due elementi di W anche la loro somma sta in W:

$$(p_1 + p_2)(2) = p_1(2) + p_2(2) = 0 + 0 = 0$$

– W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di W e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in W:

$$(\lambda p)(2) = \lambda \cdot p(2) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Traducendo la condizione $p(2) = 0$ sui coefficienti del generico elemento $bx^2 + cx + d$ di $\mathbf{R}_2[x]$ otteniamo $4b + 2c + d = 0$, ovvero $d = -4b - 2c$. Quindi ogni elemento di W è del tipo

$$p(x) = bx^2 + cx - 4b - 2c = b(x^2 - 4) + c(x - 2)$$

I due polinomi, linearmente indipendenti, $p_1(x) = x^2 - 4$ e $p_2(x) = x - 2$ costituiscono una base di W, quindi

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^2 - 4,\ p_2(x) = x - 2\right\}$$

c) Per determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata la cosa più semplice è forse associare ad ogni polinomio le sue componenti rispetto alla base canonica $\left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai polinomi $p_1(x),\ p_2(x),\ p(x)$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 0, -4), \quad p_2 = (0, 1, -2), \quad p = (-1, 1, 2)$$

Risolviamo quindi l'equazione $xp_1 + yp_2 = p$:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ -4x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad p(x) = -p_1(x) + p_2(x)$$

ovvero $p(x)$ ha coordinate $(-1, 1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

$\square$

Esercizio 0.6. (Facoltativo) *Sia $x \in \mathbf{R}^n$ un vettore colonna, $n > 1$. Dimostrare che la matrice $A = xx^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha determinante nullo.*

Soluzione:

Sia $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ allora xx^T è una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \dots & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{bmatrix}$$

In sostanza ogni riga di A è un multiplo della riga formata da x^T. Se $x = 0$ allora anche la matrice A è nulla e $\text{rg}(A) = 0$, altrimenti A può essere ridotta nella matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove la riga ottenuta è non nulla, quindi se $x \neq 0$ la matrice $A = xx^T$ ha rango 1.

In ogni caso, essendo $n > 1$ e $\text{rg}(A) \leq 1$, la matrice A ha determinante nullo.

$\square$