CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

I PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA B – GEOMETRIA – 17/04/2009

Esercizio 0.1. *Si consideri il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + 4z = 2 \\ x + (k-3)y + 8z = 3 \\ 3x + (k+17)z = 8 \\ -x + (k+1)z = 0 \end{cases}$$

con k parametro reale.

(a) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*

(b) *Si trovino esplicitamente le soluzioni del sistema quando questo ammette infinite soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & k-3 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & k+17 & 8 \\ -1 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-3I \\ IV+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & k-3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & k+5 & 2 \\ 0 & 0 & k+5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & k-3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & k+5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi:
   - Se $k \neq 3, -5$ allora $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette un'unica soluzione;
   - Se $k = 3$ otteniamo la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

     Di conseguenza $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni;
   - Se $k = -5$ allora $\text{rg}(A) = 2$ mentre $\text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzioni.

   In conclusione il sistema ha soluzione per ogni $k \neq -5$.

b) Risolviamo il sistema per $k = 3$

$$\begin{cases} x + 4z = 2 \\ 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 0.2. *Si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$.*

a) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche del piano π passante per i punti A, B, C.*

b) *Si trovino equazioni cartesiane della retta r passante per $D = (2, 2, 0)$ e ortogonale a π.*

c) *Sia s la retta passante per i punti B e C. Stabilire la posizione reciproca fra r e s (rette parallele, incidenti, sghembe...).*

Soluzione:

a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = (-1, -2, 0)$$

otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = 1 + t - 2s \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\ t,\ s\ \in\ \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad 2x - y + 3z = 1$$

b) La retta ortogonale a π ha direzione parallela a $(2,-1,3)$. Imponendo il passaggio per D otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 6 \\ 3y+z = 6 \end{cases}$$

c) La retta s ha equazione cartesiana

$$s: \begin{cases} x = -1-t \\ y = -2t \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che r e s non sono parallele. Mettendo a sistema l'equazione cartesiana di r con quella parametrica di s otteniamo:

$$\begin{cases} x = -1-t \\ y = -2t \\ z = 1 \\ x+2y = 6 \\ 3y+z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1-t \\ y = -2t \\ z = 1 \\ -1-t-4t = 6 \\ -6t+1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1-t \\ y = -2t \\ z = 1 \\ -5t = 7 \\ -6t = 5 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e r e s sono sghembe.

□

Esercizio 0.3. *Si considerino i punti del piano* $A = (2,0)$, $B = (0,t)$, $C = (0,0)$ *e* $A' = \left(2+\sqrt{3}, 3\right)$, $B' = \left(\frac{3}{2}, 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C' = (2,2)$.

a) *Per quali valori di t esiste un'isometria diretta che trasforma i punti A, B, C nei punti A', B', C' rispettivamente?*
b) *Per i valori di t determinati al punto precedente, trovare le equazioni dell'isometria.*
c) *Stabilire se l'isometria f in* b) *ha dei punti fissi, cioè tali che $f(P) = P$.*

Soluzione:

a) Un'isometria conserva le distanze, quindi:

$$\begin{aligned} |AB| = |A'B'| \ &\Rightarrow\ \sqrt{4t^2+1} = \sqrt{5} \ \Rightarrow\ t = \pm 1 \\ |AC| = |A'C'| \ &\Rightarrow\ 2 = 2 \\ |BC| = |B'C'| \ &\Rightarrow\ |t| = 1 \ \Rightarrow\ t = \pm 1 \end{aligned}$$

Di conseguenza perché esista un'isometria deve essere $t = \pm 1$. Inoltre rappresentando i punti si vede che l'isometria è diretta per $t > 0$, quindi esiste un'isometria diretta che trasforma i punti A, B, C nei punti A', B', C' rispettivamente, per $t = 1$.

In alternativa per rispondere alla domanda a) si poteva impostare il sistema relativo alla generica isometria diretta:

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \\ f(C) = C \\ c^2+s^2 = 1 \end{cases}$$

b) Sia

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

la generica isometria diretta. Imponendo le condizioni $f(A) = A'$ e $f(C) = C'$ (con $t = 1$) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2 = a \\ 2 = b \\ 2+\sqrt{3} = 2c + a \\ 3 = 2s + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ s = \frac{1}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi l'isometria f cercata è

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 2 \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta di una rotazione antioraria pari ad un angolo di 30°.

c) Imponendo al generico punto $P(x, y)$ la condizione $P' = f(P) = P$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\sqrt{3})x + y = 4 \\ -x + (2-\sqrt{3})y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - (2-\sqrt{3})x \\ -x + 4(2-\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})^2 x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Infine il punto fisso dell'isometria (centro di rotazione) è $P(-1-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.

□

Esercizio 0.4. *Siano assegnati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (3, 3, 3, -6),\ v_2 = (1, 0, 1, -2),\ v_3 = (0, 1, 1, 0),\ v_4 = (0, 0, 2, k-1),\ v_5 = (1, 1, 2, -2)$$

con k parametro reale.

(a) *Si stabilisca per quali valori di k il sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ coincide con $\mathbf{R}^4$.*

(b) *Per i valori trovati al punto precedente si esprimano le coordinate di v_5 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbf{R}^4$.*

Soluzione:

Lo spazio $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ coincide con $\mathbf{R}^4$ se $\dim(V) = 4$, cioè se il rango della matrice associata a v_1, v_2, v_3, v_4 è 4. Inoltre, in tali casi, le coordinate di v_5 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono date dalla soluzione dell'equazione $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = v_5$. Per rispondere a entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai primi quattro vettori, con il vettore v_5 come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ -6 & -2 & 0 & k-1 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - I \\ IV + 2I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) I quattro vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti e quindi $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathbf{R}^4$ se $k \neq 1$

b) Dalla matrice ridotta, con $k \neq 1$, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ z + 2w = 1 \\ (k-1)w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine $v_5 = v_2 + v_3$ ovvero v_5 ha coordinate $(0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbf{R}^4$.

□

Esercizio 0.5. *Sia W il sottoinsieme dello spazio di polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(-1) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$.*

b) *Trovare una base e la dimensione di W.*

c) *Determinare le coordinate del polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 1 \in W$ rispetto alla base trovata al punto b).*

Soluzione:

a) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo innanzitutto verificare che W è un sottoinsieme di $\mathbf{R}_2[x]$. In effetti la condizione $p''' = 0$ applicata al generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$ diventa $6a = 0$. Quindi se $p(x) \in W$ deve essere del tipo $p(x) = bx^2 + cx + d$ cioè un elemento di $\mathbf{R}_2[x]$. Inoltre W può essere riscritto come

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(-1) = 0\}$$

Per dimostrare ora che si tratta di un sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

- W è chiuso rispetto alla somma, infatti presi due elementi di W anche la loro somma sta in W:

$$(p_1 + p_2)(-1) = p_1(-1) + p_2(-1) = 0 + 0 = 0$$

- W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di W e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in W:

$$(\lambda p)(-1) = \lambda \cdot p(-1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Traducendo la condizione $p(-1) = 0$ sui coefficienti del generico elemento $bx^2 + cx + d$ di $\mathbf{R}_2[x]$ otteniamo $b - c + d = 0$, ovvero $d = -b + c$. Quindi ogni elemento di W è del tipo

$$p(x) = bx^2 + cx - b + c = b(x^2 - 1) + c(x + 1)$$

I due polinomi, linearmente indipendenti, $p_1(x) = x^2 - 1$ e $p_2(x) = x + 1$ costituiscono una base di W, quindi

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^2 - 1,\ p_2(x) = x + 1\right\}$$

c) Per determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata la cosa più semplice è forse associare ad ogni polinomio le sue componenti rispetto alla base canonica $\left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai polinomi $p_1(x),\ p_2(x),\ p(x)$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 0, -1), \quad p_2 = (0, 1, 1), \quad p = (1, 2, 1)$$

Risolviamo quindi l'equazione $xp_1 + yp_2 = p$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Infine $p(x) = p_1(x) + 2p_2(x)$, ovvero $p(x)$ ha coordinate $(1, 2)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

$\square$

Esercizio 0.6. (Facoltativo) *Sia $x \in \mathbf{R}^n$ un vettore colonna, $n > 1$. Dimostrare che la matrice $A = xx^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha determinante nullo.*

SOLUZIONE:
Sia $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ allora xx^T è una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{bmatrix}$$

In sostanza ogni riga di A è un multiplo della riga formata da x^T. Se $x = 0$ allora anche la matrice A è nulla e $\text{rg}(A) = 0$, altrimenti A può essere ridotta nella matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove la riga ottenuta è non nulla, quindi se $x \neq 0$ la matrice $A = xx^T$ ha rango 1.

In ogni caso, essendo $n > 1$ e $\text{rg}(A) \leq 1$, la matrice A ha determinante nullo.

$\square$