

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

II PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA C – GEOMETRIA – 19/06/2008

Esercizio 0.1. Si consideri il seguente endomorfismo di \mathbf{R}^4

$$T(x, y, z, w) = (x + 2y + 3z + w, y + z, x + y + 2z + (k + 1)w, -x + y + (2k - 3)w)$$

con k parametro reale.

- a) Si determinino basi di immagine e nucleo di T al variare di k .
- b) Si stabilisca, al variare di k , se il vettore $v = (0, 0, 1, 1)$ appartiene all'immagine di T .

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & k+1 \\ -1 & 1 & 0 & 2k-3 \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla colonna data dal vettore v :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & k+1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2k-3 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III - I \\ IV + I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2k-2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \begin{array}{l} III + II \\ IV - 3II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} III + II \\ IV - 2III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Anche senza completare la riduzione possiamo rispondere ad entrambe le domande.

- a) La matrice $M(T)$ ha rango 3 per ogni valore di k , inoltre una base dell'immagine è data da:

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{ (1, 0, 1, -1), (2, 1, 1, 1), (1, 0, k + 1, 2k - 3) \}$$

Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a T :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 0 \\ y + z = 0 \\ kw = 0 \\ -2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\ker(T)) = \{ (-1, -1, 1, 0) \}$$

- b) Consideriamo il sistema $M(T)|v$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 0 \\ y + z = 0 \\ kw = 1 \\ -2w = -1 \end{cases}$$

Notiamo che dalle ultime due equazioni ricaviamo la condizione $k = 2$. In questo caso otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 0 \\ y + z = 0 \\ -2w = -1 \end{cases}$$

che ha soluzione. Quindi $v \in \text{Im}(T)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 0.2. Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$ una base di \mathbf{R}^3 .

- a) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} nel dominio e rispetto alla base canonica \mathcal{E} nel codominio.
 b) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} .

SOLUZIONE:

- a) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base \mathcal{B} , espresse rispetto alla base canonica. Calcoliamo quindi le immagini dei vettori v_i , utilizzando la matrice $M(T)$:

$$\begin{aligned} M(T) \cdot v_1^t &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_1) = (3, 1, 4) \\ M(T) \cdot v_2^t &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_2) = (5, 1, 1) \\ M(T) \cdot v_3^t &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_3) = (4, 0, -3) \end{aligned}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- b) La matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base \mathcal{B} , espresse rispetto alla base \mathcal{B} . Dobbiamo quindi esprimere rispetto alla base \mathcal{B} i vettori $T(v_i)$, trovati al punto precedente. Si tratta di risolvere i tre sistemi $xv_i + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Per comodità riduciamo a gradini i tre sistemi contemporaneamente, affiancando direttamente le tre colonne dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} I - III \\ II - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -z = -2 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_1) = -v_1 + 2v_2 + 2v_3 = (-1, 2, 2)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ -z = -4 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_2) = 4v_1 - 3v_2 + 4v_3 = (4, -3, 4)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ -z = -4 \\ y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -7 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(v_3) = 7v_1 - 7v_2 + 4v_3 = (7, -7, 4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base \mathcal{B} è

$$M(T)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & -7 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 0.3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -8 \\ -4 & k & -6 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

- a) Si determini una base ortonormale di \mathbf{R}^3 formata da autovettori di A .
 b) Si stabilisca se esistono valori di k per cui A e B sono simili.

SOLUZIONE:

- a) Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 5$.

Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1) = \ker(A - I) : \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow E(1) = \langle (0, 1, 0) \rangle =$$

$$E(3) = \ker(A - 3I) : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow E(3) = \langle (1, 0, -1) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

$$E(5) = \ker(A - 5I) : \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow E(5) = \langle (1, 0, 1) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

Infine una base ortonormale di \mathbf{R}^3 formata da autovettori di T è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

- b) Il polinomio caratteristico di B è $P_B(\lambda) = (k - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$, quindi gli autovalori di B sono $\lambda = k, 1, 5$. Condizione necessaria perché B sia simile ad A è che abbia gli stessi autovalori con la stessa molteplicità, quindi deve essere $k = 3$. Inoltre anche B è diagonalizzabile poiché i suoi tre autovalori hanno molteplicità algebrica uno: in questo modo A e B sono simili in quanto simili alla stessa matrice diagonale. Infine le matrici A e B sono simili per $k = 3$.

□

Esercizio 0.4. Sia r la retta dello spazio di equazioni cartesiane $r : 2x - y + 1 = x - z = 0$.

- (a) Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r' ottenuta proiettando r sul piano $x - y + z = 0$ dal centro $C = (2, 1, 1)$.
 (b) Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta r' e stabilire se r e r' sono parallele.

SOLUZIONE:

La retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1, -1, 1, 0)$ e C ha coordinate omogenee $C(2, 1, 1, 1)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^t C - (N \cdot C) I_4 = N^t C - 2I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo due qualsiasi punti di r , in coordinate omogenee, per esempio $A = (0, 1, 0, 1)$ e $B = (1, 3, 1, 1)$, e calcoliamone la proiezione:

$$A' = A \cdot M = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [-2 \quad -3 \quad -1 \quad -3]$$

$$\Rightarrow A' = (-2, -3, -1, -3) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow A' = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

$$B' = B \cdot M = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [-4 \quad -7 \quad -3 \quad -3]$$

$$\Rightarrow B' = (-4, -7, -3, -3) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 1, 1\right) \Rightarrow B' = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$$

Infine la retta r' è la retta passante per A' e B' :

$$r' : \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = 1 + 2t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad 3x - 3z - 1 = 6x - 3y - 1 = 0$$

- b) La retta r' ha direzione $(1, 2, 1)$, quindi punto all'infinito $P_\infty = (1, 2, 1, 0)$. r e r' sono parallele perchè le rispettive direzioni sono uguali, ovvero hanno lo stesso punto all'infinito. □

Esercizio 0.5. Sia \mathcal{C} la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : x^2 + xy + y^2 - 4ky = 0.$$

- Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di \mathcal{C}_k .
- In caso di conica a centro, trovare le coordinate del centro di simmetria al variare del parametro k .
- Trovare equazioni degli assi di simmetria di \mathcal{C}_1 (porre $k = 1$).

SOLUZIONE:

- a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2k \\ 0 & -2k & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A') = -4k^2$, quindi se $k = 0$ si tratta di una conica degenera. In particolare per $k = 0$ si ottiene la conica $\mathcal{C}_0 : x^2 + xy + y^2 = 0$, ovvero una coppia di rette immaginarie che si intersecano nel punto reale $(0, 0)$.

Nel caso non degenera, $k \neq 0$, per trovare la forma canonica determiniamo gli autovalori di A . $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}$, quindi A ha autovalori $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{3}{2}$. Poiché gli autovalori sono concordi si tratta di un'ellisse e quindi la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$. Cerchiamo un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-4k^2 = \frac{3}{4}t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{16k^2}{3}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{16k^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{32k^2}x^2 + \frac{3}{32k^2}y^2 - 1 = 0$$

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2k \end{array} \right] \Rightarrow C = \left(-\frac{4}{3}k, \frac{8}{3}k \right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro $C = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right)$ nel caso $k = 1$, di direzione parallela agli autovettori di A . Calcoliamo quindi gli autospazi di A :

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = N\left(A - \frac{1}{2}I\right) : \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}\right) = \langle (1, -1) \rangle$$

$$E\left(\frac{3}{2}\right) = N\left(A - \frac{3}{2}I\right) : \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow E\left(\frac{3}{2}\right) = \langle (1, 1) \rangle$$

Infine gli assi sono le rette

$$a_1 : x + y - \frac{4}{3} = 0 \quad a_2 : x - y + 4 = 0$$

□