CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

II PROVA DI ACCERTAMENTO, FILA A – GEOMETRIA – 19/06/2008

Esercizio 0.1. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$

$$T(x,y,z,w) = (\ x+2y+2z+w,\ y+z,\ x+y+z+(k+1)w,\ -x+y+z+(2k-2)w\ )$$

con k *parametro reale.*

a) *Si determino basi di immagine e nucleo di* T *al variare di* k.

b) *Si stabilisca, al variare di* k, *se il vettore* $v = (0,0,1,1)$ *appartiene all'immagine di* T.

Soluzione:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \\ -1 & 1 & 1 & 2k-2 \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla calonna data dal vettore v:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2k-2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ IV+I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2k-1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV-3II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-2III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Anche senza completare la riduzione possiamo rispondere ad entrambe le domande.

a) La matrice $M(T)$ ha rango 3 per ogni valore di k, inoltre una base dell'immagine è data da:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (1,0,1,-1),\ (2,1,1,1),\ (1,0,k+1,2k-2)\ \}$$

Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a T:

$$\begin{cases} x+2y+2z+w=0 \\ y+z=0 \\ kw=0 \\ -w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=-t \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\ker(T)) = \{\ (0,1,-1,0)\ \}$$

b) Consideriamo il sistema $M(T)|v$.

$$\begin{cases} x+2y+2z+w=0 \\ y+z=0 \\ kw=1 \\ -w=-1 \end{cases}$$

Notiamo che dalle ultime due equazioni ricaviamo la condizione $k \neq 1$. In questo caso otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y+2z+w=0 \\ y+z=0 \\ w=1 \end{cases}$$

che ha soluzione. Quindi $v \in \mathrm{Im}(T)$ se $k=1$.

□

Esercizio 0.2. *Si consideri la funzione lineare* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (1,0,1)\}$ *una base di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *nel dominio e rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$ *nel codominio.*

b) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.

Soluzione:

a) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base canonica. Calcoliamo quindi le immagini dei vettori v_i, utilizzando la matrice $M(T)$:

$$M(T)\cdot v_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(v_1) = (1,0,4)$$

$$M(T)\cdot v_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(v_2) = (4,1,5)$$

$$M(T)\cdot v_3^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(v_3) = (4,0,3)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi esprimere rispetto alla base $\mathcal{B}$ i vettori $T(v_i)$, trovati al punto precedente. Si tratta di risolvere i tre sistemi $xv_i + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per comodità riduciamo a gradini i tre sistemi contemporaneamente, affiancando direttamente le tre colonne dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} I-III \\ II-I \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \ \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -z = -1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$T(v_1) = -3v_1 + 3v_2 + v_3 = (-3,3,1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \ \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -z = -3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$T(v_2) = -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = (-1,2,3)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \ \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -z = -4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$
$$T(v_3) = v_1 - v_2 + 4v_3 = (1,-1,4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M(T)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 0.3. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -4 & k & -4 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

con k *parametro reale.*

a) *Si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* A.
b) *Si stabilisca se esistono valori di* k *per cui* A *e* B *sono simili.*

SOLUZIONE:

a) Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 3$, doppio, e $\lambda = -1$.
Calcoliamo gli autospazi:

$$E(3) = \ker(A - 3I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E(3) = \langle (1,0,1),\ (0,1,0) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),\ (0,1,0) \rangle$$

$$E(-1) = \ker(A + I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E(-1) = \langle (1,0,-1) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rangle$$

Infine una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),\ (0,1,0),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

b) Il polinomio caratteristico di B è $P_B(\lambda) = (k-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$, quindi gli autovalori di B sono $\lambda = k, 3, -1$. Condizione necessaria perché B sia simile ad A è che abbia gli stessi autovalori con la stessa molteplicità, quindi deve essere $k = 3$. Inoltre anche B deve essere diagonalizzabile: in questo modo A e B sono simili in quanto simili alla stessa matrice diagonale. Calcoliamo quindi l'autospazio $E_B(3)$, con $k = 3$:

$$E_B(3) = \ker(B - 3I) : \begin{bmatrix} -8 & 0 & -8 & | & 0 \\ -4 & 0 & -4 & | & 0 \\ 4 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_B(3) = \langle (1,0,1),\ (0,1,0) \rangle$$

Poiché $E_B(3)$ ha dimensione due, anche B è diagonalizzabile, quindi A e B sono simili per $k = 3$.

□

Esercizio 0.4. *Sia* r *la retta dello spazio di equazioni cartesiane* $r\ :\ 2x - y + 1 = x - z = 0$.

(a) *Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta* r' *ottenuta proiettando* r *sul piano* $x + y + z = 0$ *dal centro* $C = (2,1,1)$.
(b) *Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta* r' *e stabilire se* r *e* r' *sono parallele.*

SOLUZIONE:
La retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,1,1,0)$ e C ha coordinate omogenee $C(2,1,1,1)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - (N \cdot C)I_4 = N^tC - 4I_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo due qualsiasi punti di r, in coordinate omogenee, per esempio $A = (0,1,0,1)$ e $P_\infty = (1,2,1,0)$, e calcoliamone la proiezione:

$$A' = A \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = (2,-3,1,-3) = \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 1\right) \quad \Rightarrow \quad A'\left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)$$

$$P'_\infty = P_\infty \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P'_\infty = (4,-4,0,4) = (1,-1,0,1) \quad \Rightarrow \quad P'_\infty = (1,-1,0)$$

Infine la retta r' è la retta passante per A' e P'_∞:

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -1 - 6t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad x - 5z - 1 = y + 6z + 1 = 0$$

b) La retta r' ha direzione $(5,-6,1)$, quindi punto all'infinito $P_\infty = (5,-6,1,0)$. r e r' non sono parallele perchè le rispettive direzioni non sono proporzionali, ovvero non hanno lo stesso punto all'infinito.

$\square$

Esercizio 0.5. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k : \; x^2 + 4xy + y^2 - 2kx + 4ky = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di $\mathbf{C}_k$.*
b) *In caso di conica a centro, trovare le coordinate del centro di simmetria al variare del parametro k.*
c) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di $\mathbf{C}_1$ (porre $k = 1$).*

SOLUZIONE:

a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ 2 & 1 & 2k \\ -k & 2k & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A') = -13k^2$, quindi se $k = 0$ si tratta di una conica degenere. In particolare per $k = 0$ si ottiene la conica $\mathcal{C}_0 : \; x^2 + 4xy + y^2 = 0$, ovvero la coppia di rette reali $x = (-2 + \sqrt{3})y$ e $x = (-2 - \sqrt{3})y$ che si intersecano nell'origine.

Nel caso non degenere, $k \neq 0$, per trovare la forma canonica determiniamo gli autovalori di A. $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, quindi A ha autovalori $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Poiché gli autovalori sono discordi si tratta di un'iperbole e quindi la forma canonica sarà del tipo $ax^2 - by^2 - 1 = 0$. Cerchiamo un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-13k^2 = -3t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{13k^2}{3}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$3x^2 - y^2 + \frac{13k^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{13k^2}x^2 - \frac{3}{13k^2}y^2 + 1 = 0$$

Per ottenere esattamente la forma canonica dobbiamo ancora effettuare la rotazione che scambia x e y:

$$\frac{3}{13k^2}x^2 - \frac{9}{13k^2}y^2 - 1 = 0$$

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & k \\ 2 & 1 & | & -2k \end{bmatrix} \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{3}k, \frac{4}{3}k\right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro $C = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nel caso $k = 1$, di direzione parallela agli autovettori di A. Calcoliamo quindi gli aoutospazi di A:

$$E(-1) = N(A + I): \begin{bmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad E(-1) = \langle(1, -1)\rangle$$

$$E(3) = N(A - 3I): \begin{bmatrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle(1, 1)\rangle$$

Infine gli assi sono le rette

$$a_1: \ x + y + \frac{1}{3} = 0 \qquad a_2: \ x - y + 3 = 0$$

$\square$