CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 2/09/2009, FILA B – GEOMETRIA –

Esercizio 1. *Si considerino i piani* $\pi_1: \ x - 2y + 4z = 24$ *e* $\pi_2: \ 3x + y - z = 0$, *e la retta* $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Determinare equazioni paremátriche e cartesiane della retta* s *passante per* $A = (1, 1, 1)$ *e perpendicolare a* π_1.

b) *Stabilire la posizione reciproca di* r *e* s.

c) *Determinare l'angolo tra* r *e* s.

SOLUZIONE:

a) π_1 è perpendicolare al vettore $(1, -2, 4)$, quindi la retta s ha equazioni

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) La retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ ha equazioni

$$r: \begin{cases} x - 2y + 4z = 24 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 2t \\ y = -13t + 12 \\ z = -7t + 12 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

r e s sono rispettivamente parallele a $(2, -13, -7)$ e $(1, -2, 4)$, quindi non sono parallele. Inoltre

$$r \cap s = \begin{cases} x - 2y + 4z = 24 \\ 3x + y - z = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t - 2 + 4t + 4 + 16t = 24 \\ 3 + 3t + 1 - 2t - 1 - 4t = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ x = 2 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Quindi r e s si intersecano nel punto $r \cap s = P(2, -1, 5)$.

c) Indicato con ϑ l'angolo tra r e s otteniamo $\cos(\vartheta) = 0$, quindi r e s sono tra loro ortogonali.

□

Esercizio 2. *Si consideri l'isometria* f *del piano che trasforma i punti* $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ *e* $B = (1, 1)$ *rispettivamente nei punti* $O' = (1, 4)$, $A' = \left(\frac{9}{5}, \frac{23}{5}\right)$ *e* $B' = \left(\frac{12}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

a) *Stabilire il tipo di isometria e trovarne le equazioni.*

b) *Stabilire se* f *ha dei punti fissi e in caso positivo trovarli.*

SOLUZIONE:

Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è orario mentre l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ è antiorario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ 4 = b \\ \frac{9}{5} = c + 1 \\ \frac{23}{5} = s + 4 \\ \frac{12}{5} = c + s + 1 \\ \frac{19}{5} = s - c + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = \frac{4}{5} \\ s = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1, \ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4\right)$$

Per stabilire se si tratta di una riflessione o glissoriflessione cerchiamo gli eventuali punti fissi impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \\ y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 5 \\ -3x + 9y = 20 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 5 \\ -15 = 20 \end{cases}$$

Poiché il sistema non ammette soluzione, la trasformazione non ha punti fissi e si tratta quindi di una glissoriflessione.

□

Esercizio 3. *Si considerino i vettori*

$$v_1 = (2k+2, 0, 1, 1),\;\; v_2 = (0, k+2, 0, 0),\;\; v_3 = (0, k+2, k+2, 1),\;\; v_4 = (1, k+3, 0, 0),\;\; w = (0, 1, 1, 1)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Al variare di k in $\mathbf{R}$ si determini la dimensione e una base di $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.*
b) *Posto $k = -1$ si esprima w come combinazione lineare della base trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) Dobbiamo calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2k+2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k+2 & k+2 & k+3 \\ 1 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda colonna $\det(A) = (k+2)(-k-1)$. Quindi

– Se $k \neq -2, -1$, la matrice A ha determinante non nullo, quindi rango 4. In tali casi $\dim(V) = 4$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
– Per $k = -2$ otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III + I \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ IV \\ \\ II - III \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $\mathrm{rg}(A) = 3$ si ha $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3, v_4\}$.

– Per $k = -1$ otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ \\ I \\ III - IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $\mathrm{rg}(A) = 3$ si ha $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_4\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_4 = w$ con $k = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ \\ I \\ III - IV \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad w = v_1 + v_2$$

□

Esercizio 4. *Sia T l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3) = ((1+k)x_1 + kx_2, kx_1 + kx_2, -2x_1 + x_3, kx_1 + kx_2).$$

a) *Determinare la dimensione del nucleo di T, al variare del parametro reale k.*
b) *Sia $b = (1, 2, 0, k)$. Per quali valori reali di k il vettore b appartiene all'immagine di T? Per tali k, trovare una controimmagine di b.*

Soluzione:

Sia $A = M(T)$ la matrice assocaita a T rispetto alla base canonica. Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1+k & k & 0 & | & 1 \\ k & k & 0 & | & 2 \\ -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ k & k & 0 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1+k & k & 0 & | & 1 \\ -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III-2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1+k & k & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+(k+1)I \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & k & 0 & | & k+2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice A dei coefficienti:
   - Se $k \neq 0$, A ha rango 3, quindi $\dim(\ker(T)) = 0$ e $\ker(T) = \{0\}$.
   - Se $k = 0$, per determinare il nucleo (di dimensione 1) risolvendo il sistema omgeneo associato ad A otteniamo $x = z = 0$, quindi una base del nucleo è $\mathcal{B}(\ker(T)) = \{(0, 1, 0)\}$.

b) b appartiene all'immagine di T se il sistema $A|b$ ammette soluzione, quindi se $k = 2$. Per tale valore la soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} -x = 1 \\ 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Quindi per $k = 2$ la controimmagine di b è il vettore $(-1, 2, -2)$ in quanto $T(-1, 2, -2) = b$.

□

Esercizio 5. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che al polinomio $a + bx + cx^2$ associa il polinomio*

$$(k+1)a + (k-1)c + (-ka + b + (1-k)c)x + ((1-k)a + (3-k)c)x^2.$$

a) *Trovare la matrice associata a S rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.*

b) *Determinare i valori reali di k per i quali S è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Determiniamo le immagini degli elementi della base (canonica) $\mathcal{B}$:

$$S(1) = (k+1) - kx + (1-k)x^2, \quad S(x) = x, \quad S(x^2) = (k-1) + (1-k)x + (3-k)x^2$$

Di conseguenza la matrice associata a S rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ -k & 1 & 1-k \\ 1-k & 0 & 3-k \end{bmatrix}$$

b) Caolcoliamo il polinomio caratteristico di M sviluppando il determinante di $M - \lambda I$ rispetto alla seconda colonna:

$$p_M(\lambda) = (1-\lambda)\left[(k+1-\lambda)(3-k-\lambda) + (k-1)^2\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

Di conseguenza S ha come autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$. Condizione necessaria e sufficiente affinché S sia diagonalizzabile è che la dimensione dell'autospazio $E(2)$ sia 2:

$$E(2) = \ker(M - 2I) : \begin{bmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ -k & -1 & 1-k \\ 1-k & 0 & 1-k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+I \\ III+I \end{array} \begin{bmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $k \neq 1$, la matrice associata a $E(2)$ ha rango 2, quindi $\dim(E(2)) = 1$ e S non è diagonalizzabile. Se invece $k = 1$, la matrice associata a $E(2)$ ha rango 1, quindi $\dim(E(2)) = 2$ e S è diagonalizzabile.

□

Esercizio 6. *Sia $\mathbf{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \; : \; 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 5x + y + 1 = 0.$$

a) *Dimostrare che $\mathcal{C}$ è non degenere.*

b) *Trovare l'equazione canonica di $\mathcal{C}$.*

c) *Trovare i punti impropri di $\mathcal{C}$.*

Soluzione:

a) La matrice A' associata alla conica è

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -8 \neq 0$, si tratta di una conica non degenere.

b) Determiniamo gli autovalori della matrice A associata alla forma quadratica. Poiché $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 4$ la matrice ha come autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 4$ e si tratta di una parabola. Sappiamo quindi che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo $\lambda x^2 + 2ty = 0$:

$$4x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-8 = -4t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$4x^2 - 2\sqrt{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0$$

c) Passando alle coordinate omogenee e imponendo la condizione $Z = 0$, otteniamo l'equazione $2X^2 + 4XY + 2Y^2 = 0$, che ha come soluzione $X = -Y$. Di conseguenza la conica ha come punto improprio il punto $P_\infty = (1, -1, 0)$.

□