CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 2/09/2009, FILA A – GEOMETRIA –

Esercizio 1. *Si considerino i piani* $\pi_1: \ 2x-y+z=-4$ *e* $\pi_2: \ x+2y-3z=3$*, e la retta* $r=\pi_1\cap\pi_2$*.*

a) *Determinare equazioni parematriche e cartesiane della retta* s *passante per* $A=(1,1,1)$ *e perpendicolare a* π_1*.*
b) *Stabilire la posizione reciproca di* r *e* s*.*
c) *Determinare l'angolo tra* r *e* s*.*

SOLUZIONE:

a) π_1 è perpendicolare al vettore $(2,-1,1)$, quindi la retta s ha equazioni

$$s: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x+2y=3 \\ y+z=2 \end{cases}$$

b) La retta $r=\pi_1\cap\pi_2$ ha equazioni

$$r: \begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=t \\ y=7t+9 \\ z=5t+5 \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

r e s sono rispettivamente parallele a $(1,7,5)$ e $(2,-1,1)$, quindi non sono parallele. Inoltre

$$r\cap s=\begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+2y-3z=3 \\ x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+4t-1+t+1+t=-4 \\ 1+2t+2-2t-3-3t=3 \\ x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Quindi r e s si intersecano nel punto $r\cap s=P(-1,2,0)$.

c) Indicato con ϑ l'angolo tra r e s otteniamo $\cos(\vartheta)=0$, quindi r e s sono tra loro ortogonali.

□

Esercizio 2. *Si consideri l'isometria* f *del piano che trasforma i punti* $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ *e* $B=(1,1)$ *rispettivamente nei punti* $O'=(1,-2)$, $A'=\left(\frac{2}{5},-\frac{6}{5}\right)$ *e* $B'=\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$*.*

a) *Stabilire il tipo di isometria e trovarne le equazioni.*
b) *Stabilire se* f *ha dei punti fissi e in caso positivo trovarli.*

SOLUZIONE:

Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è orario mentre l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ è antiorario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x'=cx+sy+a \\ y'=sx-cy+b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O)=O'$, $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1=a \\ -2=b \\ \frac{2}{5}=c+1 \\ -\frac{6}{5}=s-2 \\ \frac{6}{5}=c+s+1 \\ -\frac{3}{5}=s-c-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-\frac{3}{5} \\ s=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow f(x,y)=\left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1,\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2\right)$$

Per stabilire se si tratta di una riflessione o glissoriflessione cerchiamo gli eventuali punti fissi impostando il sistema

$$f(x,y)=(x,y) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1 \\ y=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-4y=5 \\ -4x+2y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-4y=5 \\ 5=20 \end{cases}$$

Poiché il sistema non ammette soluzione, la trasformazione non ha punti fissi e si tratta quindi di una glissoriflessione.

□

Esercizio 3. *Si considerino i vettori*

$$v_1=(k+1,0,k+1,1),\ v_2=(0,1,k+2,0),\ v_3=(1,2k,0,1),\ v_4=(0,0,k+1,0),\ w=(0,1,1,1)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Al variare di k in $\mathbf{R}$ si determini la dimensione e una base di $V=\langle v_1,v_2,v_3,v_4\rangle$.*
b) *Posto $k=-1$ si esprima w come combinazione lineare della base trovata al punto precedente.*

SOLUZIONE:

a) Dobbiamo calcolare il rango della matrice

$$A=\begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ k+1 & k+2 & 0 & k+1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A sviluppando rispetto alla quarta colonna $\det(A)=-k(k+1)$. Quindi

- Se $k\neq 0,-1$, la matrice A ha determinante non nullo, quindi rango 4. In tali casi $\dim(V)=4$ e una base di V è $\mathcal{B}(V)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.
- Per $k=0$ otteniamo la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III-I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $\mathrm{rg}(A)=3$ si ha $\dim(V)=3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V)=\{v_1,v_2,v_3\}$.

- Per $k=-1$ otteniamo la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ III \\ I \\ II-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $\mathrm{rg}(A)=3$ si ha $\dim(V)=3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V)=\{v_1,v_2,v_3\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1+yv_2+zv_3=w$ con $k=-1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ III \\ I \\ II-III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad w=v_1+v_2$$

□

Esercizio 4. *Sia T l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ definita da*

$$T(x_1,x_2,x_3)=(kx_1+kx_2,-kx_1+(1-k)x_2,-2x_2+x_3,kx_1+kx_2).$$

a) *Determinare la dimensione del nucleo di T, al variare del parametro reale k.*
b) *Sia $b=(2,1,2,k)$. Per quali valori reali di k il vettore b appartiene all'immagine di T? Per tali k, trovare una controimmagine di b.*

SOLUZIONE:

Sia $A = M(T)$ la matrice assocaita a T rispetto alla base canonica. Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 0 & 2 \\ -k & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ k & k & 0 & k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ \\ IV-I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array}\right] \Rightarrow III+2II \left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array}\right]$$

a) Consideriamo la matrice A dei coefficienti:
   - Se $k \neq 0$, A ha rango 3, quindi $\dim(\ker(T)) = 0$ e $\ker(T) = \{0\}$.
   - Se $k = 0$, per determinare il nucleo (di dimensione 1) risolvendo il sistema omgeneo associato ad A otteniamo $y = z = 0$, quindi una base del nucleo è $\mathcal{B}(\ker(T)) = \{(1,0,0)\}$.

b) b appartiene all'immagine di T se il sistema $A|b$ ammette soluzione, quindi se $k = 2$. Per tale valore la soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases}$$

   Quindi per $k = 2$ la controimmagine di b è il vettore $(-2, 3, 8)$ in quanto $T(-2, 3, 8) = b$.

□

Esercizio 5. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che al polinomio $a + bx + cx^2$ associa il polinomio*

$$(k+1)a + (k-1)c + (-ka + b + (1-k)c)x + ((1-k)a + (3-k)c)x^2.$$

a) *Trovare la matrice associata a S rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.*
b) *Determinare i valori reali di k per i quali S è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE:

a) Determiniamo le immagini degli elementi della base (canonica) $\mathcal{B}$:

$$S(1) = (k+1) - kx + (1-k)x^2, \quad S(x) = x, \quad S(x^2) = (k-1) + (1-k)x + (3-k)x^2$$

   Di conseguenza la matrice associata a S rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ -k & 1 & 1-k \\ 1-k & 0 & 3-k \end{bmatrix}$$

b) Caolcoliamo il polinomio caratteristico di M sviluppando il determinante di $M - \lambda I$ rispetto alla seconda colonna:

$$p_M(\lambda) = (1-\lambda)\left[(k+1-\lambda)(3-k-\lambda) + (k-1)^2\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

   Di conseguenza S ha come autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$. Condizione necessaria e sufficiente affinché S sia diagonalizzabile è che la dimensione dell'autospazio $E(2)$ sia 2:

$$E(2) = \ker(M - 2I): \quad \begin{bmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ -k & -1 & 1-k \\ 1-k & 0 & 1-k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Se $k \neq 1$, la matrice associata a $E(2)$ ha rango 2, quindi $\dim(E(2)) = 1$ e S non è diagonalizzabile. Se invece $k = 1$, la matrice associata a $E(2)$ ha rango 1, quindi $\dim(E(2)) = 2$ e S è diagonalizzabile.

□

Esercizio 6. *Sia $\mathbf{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \ : \ 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x + 2y + 3 = 0.$$

a) *Dimostrare che $\mathcal{C}$ è non degenere.*
b) *Trovare l'equazione canonica di $\mathcal{C}$.*
c) *Trovare i punti impropri di $\mathcal{C}$.*

SOLUZIONE:

a) La matrice A' associata alla conica è

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -12 \neq 0$, si tratta di una conica non degenere.

b) Determiniamo gli autovalori della matrice A associata alla forma quadratica. Poiché $p_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 - 9$ la matrice ha come autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 6$ e si tratta di una parabola. Sappiamo quindi che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo $\lambda x^2 + 2ty = 0$:

$$6x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-12 = -6t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$6x^2 - 2\sqrt{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}y = 0$$

c) Passando alle coordinate omogenee e imponendo la condizione $Z = 0$, otteniamo l'equazione $3X^2 + 6XY3Y^2 = 0$, che ha come soluzione $X = -Y$. Di conseguenza la conica ha come punto improprio il punto $P_\infty = (1, -1, 0)$.

□