

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 2/09/2009, FILA A - GEOMETRIA -

Esercizio 1. Si considerino i piani $\pi_1 : 2x - y + z = -4$ e $\pi_2 : x + 2y - 3z = 3$, e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

- Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per $A = (1, 1, 1)$ e perpendicolare a π_1 .
- Stabilire la posizione reciproca di r e s .
- Determinare l'angolo tra r e s .

SOLUZIONE:

- a) π_1 è perpendicolare al vettore $(2, -1, 1)$, quindi la retta s ha equazioni

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

- b) La retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ ha equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 7t + 9 \\ z = 5t + 5 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

r e s sono rispettivamente parallele a $(1, 7, 5)$ e $(2, -1, 1)$, quindi non sono parallele. Inoltre

$$r \cap s = \begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + 2y - 3z = 3 \\ x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 4t - 1 + t + 1 + t = -4 \\ 1 + 2t + 2 - 2t - 3 - 3t = 3 \\ x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi r e s si intersecano nel punto $r \cap s = P(-1, 2, 0)$.

- c) Indicato con ϑ l'angolo tra r e s otteniamo $\cos(\vartheta) = 0$, quindi r e s sono tra loro ortogonali. □

Esercizio 2. Si consideri l'isometria f del piano che trasforma i punti $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ e $B = (1, 1)$ rispettivamente nei punti $O' = (1, -2)$, $A' = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $B' = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

- Stabilire il tipo di isometria e trovarne le equazioni.
- Stabilire se f ha dei punti fissi e in caso positivo trovarli.

SOLUZIONE:

Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è orario mentre l'angolo $0'\widehat{A}'B'$ è antiorario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ -2 = b \\ \frac{2}{5} = c + 1 \\ -\frac{6}{5} = s - 2 \\ \frac{6}{5} = c + s + 1 \\ -\frac{3}{5} = s - c - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -\frac{3}{5} \\ s = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2\right)$$

Per stabilire se si tratta di una riflessione o glissoriflessione cerchiamo gli eventuali punti fissi impostando il sistema

$$f(x, y) = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 5 \\ -4x + 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 5 \\ 5 = 20 \end{cases}$$

Poiché il sistema non ammette soluzione, la trasformazione non ha punti fissi e si tratta quindi di una glissoriflessione. □

Esercizio 3. Si considerino i vettori

$$v_1 = (k + 1, 0, k + 1, 1), \quad v_2 = (0, 1, k + 2, 0), \quad v_3 = (1, 2k, 0, 1), \quad v_4 = (0, 0, k + 1, 0), \quad w = (0, 1, 1, 1)$$

dove k è un parametro reale.

- a) Al variare di k in \mathbf{R} si determini la dimensione e una base di $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
- b) Posto $k = -1$ si esprima w come combinazione lineare della base trovata al punto precedente.

SOLUZIONE:

- a) Dobbiamo calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ k+1 & k+2 & 0 & k+1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A sviluppando rispetto alla quarta colonna $\det(A) = -k(k+1)$.

Quindi

- Se $k \neq 0, -1$, la matrice A ha determinante non nullo, quindi rango 4. In tali casi $\dim(V) = 4$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- Per $k = 0$ otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III - I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III - 2II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $\text{rg}(A) = 3$ si ha $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

- Per $k = -1$ otteniamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ III \\ I \\ II - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} IV + 2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $\text{rg}(A) = 3$ si ha $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

- b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$ con $k = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{matrix} IV \\ III \\ I \\ II - III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow w = v_1 + v_2$$

□

Esercizio 4. Sia T l'applicazione lineare da \mathbf{R}^3 in \mathbf{R}^4 definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (kx_1 + kx_2, -kx_1 + (1 - k)x_2, -2x_2 + x_3, kx_1 + kx_2).$$

- a) Determinare la dimensione del nucleo di T , al variare del parametro reale k .
- b) Sia $b = (2, 1, 2, k)$. Per quali valori reali di k il vettore b appartiene all'immagine di T ? Per tali k , trovare una controimmagine di b .

SOLUZIONE:

Sia $A = M(T)$ la matrice associata a T rispetto alla base canonica. Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice completa $A|b$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 0 & 2 \\ -k & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ k & k & 0 & k \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} II + I \\ IV - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array} \right] \Rightarrow III + 2II \left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{array} \right]$$

- a) Consideriamo la matrice A dei coefficienti:
- Se $k \neq 0$, A ha rango 3, quindi $\dim(\ker(T)) = 0$ e $\ker(T) = \{0\}$.
 - Se $k = 0$, per determinare il nucleo (di dimensione 1) risolvendo il sistema omogeneo associato ad A otteniamo $y = z = 0$, quindi una base del nucleo è $\mathcal{B}(\ker(T)) = \{(1, 0, 0)\}$.
- b) b appartiene all'immagine di T se il sistema $A|b$ ammette soluzione, quindi se $k = 2$. Per tale valore la soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases}$$

Quindi per $k = 2$ la controimmagine di b è il vettore $(-2, 3, 8)$ in quanto $T(-2, 3, 8) = b$.

□

Esercizio 5. Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che al polinomio $a + bx + cx^2$ associa il polinomio

$$(k + 1)a + (k - 1)c + (-ka + b + (1 - k)c)x + ((1 - k)a + (3 - k)c)x^2.$$

- a) Trovare la matrice associata a S rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.
- b) Determinare i valori reali di k per i quali S è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

- a) Determiniamo le immagini degli elementi della base (canonica) \mathcal{B} :

$$S(1) = (k + 1) - kx + (1 - k)x^2, \quad S(x) = x, \quad S(x^2) = (k - 1) + (1 - k)x + (3 - k)x^2$$

Di conseguenza la matrice associata a S rispetto alla base \mathcal{B} è

$$M = \begin{bmatrix} k + 1 & 0 & k - 1 \\ -k & 1 & 1 - k \\ 1 - k & 0 & 3 - k \end{bmatrix}$$

- b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M sviluppando il determinante di $M - \lambda I$ rispetto alla seconda colonna:

$$p_M(\lambda) = (1 - \lambda) [(k + 1 - \lambda)(3 - k - \lambda) + (k - 1)^2] = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

Di conseguenza S ha come autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$. Condizione necessaria e sufficiente affinché S sia diagonalizzabile è che la dimensione dell'autospazio $E(2)$ sia 2:

$$E(2) = \ker(M - 2I) : \begin{bmatrix} k - 1 & 0 & k - 1 \\ -k & -1 & 1 - k \\ 1 - k & 0 & 1 - k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} II + I \\ III + I \end{array} \begin{bmatrix} k - 1 & 0 & k - 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $k \neq 1$, la matrice associata a $E(2)$ ha rango 2, quindi $\dim(E(2)) = 1$ e S non è diagonalizzabile. Se invece $k = 1$, la matrice associata a $E(2)$ ha rango 1, quindi $\dim(E(2)) = 2$ e S è diagonalizzabile.

□

Esercizio 6. Sia \mathcal{C} la conica di equazione

$$\mathcal{C} : 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x + 2y + 3 = 0.$$

- a) Dimostrare che \mathcal{C} è non degenere.
- b) Trovare l'equazione canonica di \mathcal{C} .
- c) Trovare i punti impropri di \mathcal{C} .

SOLUZIONE:

a) La matrice A' associata alla conica è

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -12 \neq 0$, si tratta di una conica non degenera.

b) Determiniamo gli autovalori della matrice A associata alla forma quadratica. Poiché $p_A(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 9$ la matrice ha come autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 6$ e si tratta di una parabola. Sappiamo quindi che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo $\lambda x^2 + 2ty = 0$:

$$6x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-12 = -6t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$6x^2 - 2\sqrt{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}y = 0$$

c) Passando alle coordinate omogenee e imponendo la condizione $Z = 0$, otteniamo l'equazione $3X^2 + 6XY3Y^2 = 0$, che ha come soluzione $X = -Y$. Di conseguenza la conica ha come punto improprio il punto $P_\infty = (1, -1, 0)$.

□