CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 25/06/2009, FILA B – GEOMETRIA –

Esercizio 1. *Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (1, 3, 3)$ e $B = (-1, 1, 0)$. Sia s la retta contenente il punto $C = (-4, -3, -1)$ e parallela al vettore geometrico $\overrightarrow{OD}$, con $D = (-2, -2, k)$.*

a) *Trovare gli eventuali valori di k per i quali le due rette sono incidenti. Se sono incidenti, trovare le coordinate del punto di intersezione.*
b) *Per quali k le rette sono parallele?*

Soluzione:

a) Le rette r e s hanno rispettivamente equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = -4 - 2s \\ y = -3 - 2s \\ z = -1 + ks \end{cases} \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

Per trovare gli eventuali valori di k per cui r e s sono incidenti risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -1 + 2t = -4 - 2s \\ 1 + 2t = -3 - 2s \\ 3t = -1 + ks \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + 2s = -3 \\ 2t + 2s = -4 \\ 3t - ks = -1 \end{cases}$$

La prima e seconda equazione sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e r e s non sono mai incidenti.

b) Le rette r e s sono rispettivamente parallele ai vettori $(2, 2, 3)$ e $(-2, -2, k)$, quindi sono tra loro parallele se $k = -3$

□

Esercizio 2. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0,\ x_1^2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *Se la risposta ad* a) *è affermativa, determinare una base di S.*

Soluzione:

a) Poiché l'equazione $x_1^2 = 0$ è equivalente all'equazione $x_1 = 0$, l'insieme S può essere riscritto come

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0,\ x_1 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Si tratta quindi di un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ in quanto insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

b) Per determinare esplicitamente S possiamo anche procedere per sostituzione:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3t \\ x_3 = -3t \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $S = \langle (0, 3, -3, 1) \rangle$ e una base di S è $\{(0, 3, -3, 1)\}$.

□

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*

$$v_1 = (4, 2, -2, k),\ v_2 = (1, 1, -2, 0),\ v_3 = (1, 0, 1, 0).$$

a) *Determinare per quali valori del parametro reale k i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Soluzione:
Per rispondere ad entrambe le domande e per semplificare i conti impostiamo l'equazione $xv_3+yv_2+zv_1=0$, a cui è associata la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ IV \\ III+3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il rango della matrice associata ai tre vettori è 3 se e solo se $k \neq 0$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti se $k = 0$.
b) Posto $k = 0$, risolviamo il sistema associato all'equazione $xv_3 + yv_2 + zv_1 = 0$:

$$\begin{cases} x+y+4z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=-2t \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z=t \end{cases}$$

Di conseguenza $-2tv_3 - 2tv_2 + tv_1 = 0$ per ogni valore di t, ovvero:

$$v_1 = 2v_2 + 2v_3, \qquad v_2 = \frac{1}{2}v_1 - v_3, \qquad v_3 = \frac{1}{2}v_1 - v_2$$

□

Esercizio 4. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2+2x_3, 3x_1+x_2+kx_3, 2x_1+kx_2+x_3).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la funzione T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Determinare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.*
c) *Stabilire per quali k il vettore $v = (0,1,-1)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alla base canonica è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & k \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a tutte le domande, riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione $Ax = v^t$:

$$A|v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & k & | & 1 \\ 2 & k & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-3I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -5 & k-6 & | & 1 \\ 0 & k-4 & -3 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{matrix} \\ \\ 5III+(k-4)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -5 & k-6 & | & 1 \\ 0 & 0 & k^2-10k+9 & | & k-9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $k^2 - 10k + 9 = 0$ se $k = 1$ o $k = 9$.

a) Consideriamo la matrice A dei coefficienti: $\text{rg}(A) = 3$ se $k \neq 1, 9$ e $\text{rg}(A) = 2$ se $k = 1$ o $k = 9$. Di conseguenza T è sia suriettiva che iniettiva per $k \neq 1, 9$, mentre non è nè iniettiva nè suriettiva per $k = 1$ o $k = 9$.
b) Per $k = 1$ o $k = 9$, T è biiettiva, quindi $\ker(T) = \{0\}$ e $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, e possiamo prendere come base di $\text{Im}(T)$ una qualsiasi base di $\mathbf{R}^3$. In particolare, essendo $T(e_1), T(e_2)$ e $T(e_3)$ linearmente indipendenti possiamo prendere

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(1,3,2),\ (2,1,k),\ (2,k,1)\}$$

Se $k = 1$ o $k = 9$ una base di $\text{Im}(T)$ è formata da $T(e_1)$ e $T(e_2)$, quindi

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(1,3,2),\ (2,1,1)\} \qquad \text{se } k=1$$
$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(1,3,2),\ (2,1,9)\} \qquad \text{se } k=9$$

Per trovare il nucleo di T per $k = 1$ o $k = 9$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a A:

Se $k = 1$: $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \mathcal{B}(\ker(T)) = \{(0, 1, -1)\}$

Se $k = 9$: $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{16}{5}t \\ y = \frac{3}{5}t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \mathcal{B}(\ker(T)) = \{(-16, 3, 5)\}$

c) Per rispondere all'ultima domanda consideriamo la matrice $A|v$: v appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v)$ ovvero se $k \neq 1$ (Notiamo che se $k \neq 1, 9$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v) = 3$, e se $k = 9$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v) = 2$).

□

Esercizio 5. *Sia π il piano dello spazio di equazione cartesiana*

$$\pi \;:\; 2x - y + z - 1 = 0.$$

a) *Si calcoli la matrice della proiezione sul piano π dal centro di proiezione $C = (1, 1, 1)$.*
b) *Si calcoli il punto improprio P_∞ della retta $r \;:\; 2x - y = z = 0$ e la proiezione di P_∞ sul piano π (dal centro C). Cosa si può dire della posizione reciproca di r e π?*

Soluzione:

a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(2, -1, 1, -1)$ e C ha coordinate omogenee $C(1, 1, 1, 1)$, quindi

$$N^tC = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N \cdot C = 2 - 1 + 1 - 1 = 1$$

Quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) La retta r ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi il suo punto improprio è $P_\infty = (1, 2, 0, 0)$ che viene proiettato nel punto

$$P' = P_\infty \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow P' = (-1, -2, 0, 0) = (1, 2, 0, 0)$

Notiamo che P_∞ è trasformato in se stesso, infatti r e π sono tra loro ortogonali.

□

Esercizio 6. *Sia T l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ tale che*

$$T(1, 1, 1) = (2, 1, 1), \quad T(1, 0, 0) = (4, 2, 0), \quad T(1, 1, 0) = (-2, -1, 0).$$

a) *Determinare una base ortonormale del nucleo di T.*
b) *Trovare una base dell'immagine di T.*
c) *Dire se l'endomorfismo T è diagonalizzabile.*

Soluzione:
Determiniamo le immagini attraverso T degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (4,2,0) \\ T(e_2) &= T(1,1,0) - T(1,0,0) = (-2,-1,0) - (4,2,0) = (-6,-3,0) \\ T(e_3) &= T(1,1,,1) - T(1,1,0) = (2,1,1) - (-2,-1,0) = (4,2,1) \end{aligned}$$

Di coonseguenza la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Risolviamo il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \ker(T) = \langle (3,2,0) \rangle$$

Pioché il nucleo è generato da un solo elemento per trovare una base ortonormale basta prendere un generatore di norma 1: $\mathcal{B}(\ker(T)) = \left\{ \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}, 0 \right) \right\}$.

b) Una base dell'immagine è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(4,2,0),\ (4,2,1)\}$

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico associato ad A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda)$$

Quindi T ha come autovalori $\lambda = 1$, doppio, e $\lambda = 0$. Per stabilire se T è diagonalizzabile basta deterimanre la dimensione di $E(1)$.

$$\dim(E(1)) = 3 - \mathrm{rg}(A - I) = 3 - \mathrm{rg} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Poiché la molteplicità algebrica e geometrica di $\lambda = 1$ non coincidono, T non è diagonalizzabile.

$\square$