CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 25/06/2009, FILA B – GEOMETRIA –

Esercizio 1. *Si considerino la retta* $r: \ x-3z = y+z-2 = 0$ *e la famiglia di piani* $\pi_k: \ 6x+ky+2z = 2$, *dove* k *è un parametro reale.*

a) *Determinare per quali valori di* k *il piano* π_k *è parallelo alla retta* r, *e per quali valori di* k *il piano* π_k *è ortogonale alla retta* r.

b) *Fissato* $k = 0$, *si consideri il piano* π_0. *Determinare un'equazione cartesiana del piano passante per l'origine, ortogonale a* π_0 *e al piano* $x+y+z=0$.

SOLUZIONE:

a) La retta r ha equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbf{R}$$

quindi ha direzione $v = (3,-1,1)$. Il piano $\pi_k: \ 6x+ky+2z = 4$ è ortogonale a $w = (6,k,2)$. Di conseguenza

- r e π_k sono paralleli se v e w sono ortogonali, quindi se $18-k+2 = 0$, cioè $k = 20$.
- r e π_k sono ortogonlai se v e w sono paralleli, cioè proporzionali. Di conseguenza deve essere $2\cdot(3,-1,1) = (6,k,2)$, cioè $k = -2$.

b) Consideriamo il piano $\pi_0: \ 3x+z = 2$. Notiamo che $x+y+z = 0$ e π_0 non sono tra loro paralleli, quindi la loro intersezione è una retta s:

$$s: \begin{cases} 3x+z = 2 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2+2t \\ z = 2-3t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Un piano ortogonale a π_0 e al piano $x+y+z = 0$ è anche ortogonale a s. Si tratta quindi di determinare il piano ortogonale a s passante per l'origine. Poiché s ha direzione $(1,2,-3)$, otteniamo il piano $x+2y-3z = 0$.

□

Esercizio 2. *Si considerino gli insiemi*

$$S_k = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x-y+z-2w = 0, \quad x-2y+z = k+2\right\},$$

dove k *è un parametro reale.*

a) *Stabilire per quali valori di* k *l'insieme* S_k *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}^4$.

b) *Per i valori di* k *trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di* S_k.

c) *Stabilire per quali valori di* k *il vettore* $v = (1,1,0,1)$ *appartiene a* S_k.

SOLUZIONE:

a) L'insieme S_k è uno spazio vettoriale se è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi se $k = -2$.

b) Posto $k = -2$ riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 3II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2s-t \\ y = s \\ z = t \\ w = \frac{5}{2}s-t \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Una base di S_{-2} è data da

$$\mathcal{B} = \{\ (4,2,0,5),\ (-1,0,1,-1)\ \}$$

c) $v = (1,1,0,1)$ appartiene a S_k se

$$3\cdot 1 - 1 - 2\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$
$$1 - 2\cdot 1 = k+2 \quad \Rightarrow \quad k = -3$$

Quindi $v \in S_k$ se $k = -3$.

$\square$

Esercizio 3. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k+1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ k+4 & 2k+1 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione e una base del sottospazio $V = \langle A, B, C, D \rangle$ dello spazio $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$, al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

b) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$ si stabilisca se $E \in V$. In caso affermativo, si scriva la rappresentazione di E come combinazine lineare della base di V.*

SOLUZIONE:

Per determinare la dimensione e una base di V bisogna stabilire quante e quali tra le matrici A, B, C e D sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA + yB + zC + wD = 0$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z + w = 0 \\ -x + z + (k+1)w = 0 \end{cases}$$

Per eprimere E come combinazione lineare di A, B, C e D dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB + zC + wD = E$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 2y + z + w = k+4 \\ -x + z + (k+1)w = 2k+1 \end{cases}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata al secondo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & | & k+4 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 & | & 2k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 1 & 1 & k+1 & | & 2k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & | & 2k+2 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice dei coefficienti.
   - Se $k \neq -1$ la matrice ha rango 4, quindi A, B, C e D sono linearmente indipendenti e una base di V è $\{A, B, C, D\}$, $\dim(V) = 4$.
   - Se $k = -1$ la matrice ha rango 3 e A, B e C sono linearmente indipendenti. Una base di V è $\{A, B, C\}$, $\dim(V) = 3$.

b) Per esprimere E come combinazione lineare della base trovata, consideriamo la matrice completa, distinguendo due casi:
   - Se $k \neq -1$ sia la matrice dei coefficienti che quella completa hanno rango 4, quindi il sistema ha soluzione:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 1 \\ z + w = k \\ (k+1)w = 2(k+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 3 - k \\ z = k - 2 \\ w = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad E = (k-1)A + (3-k)B + (k-2)C + 2D$$

   - Se $k = -1$, in base alla base scelta al punto precedente, dobbiamo risolvere il sistema $xA + yB + zC = E$. Consideriamo quindi solo le prime tre colonne della matrice dei coefficienti: sia la matrice dei coefficienti che quella completa hanno rango 3, quindi il sistema ha soluzione.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad E = 2B - C$$

□

Esercizio 4. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 6x_2 + kx_3,\ x_1 + kx_2 + 4x_3,\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3)$$

a) *Determinare il nucleo e l'immagine di T al variare del parametro reale k.*
b) *Stabilire per quali valori di k la funzione T è invertibile.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (1, k+5, 6)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & k \\ 1 & k & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla calonna data dal vettore v:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & k & | & 1 \\ 1 & k & 4 & | & k+5 \\ 3 & 6 & 3 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ 1/3III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & k & | & 1 \\ 0 & k-6 & 4-k & | & k+4 \\ 0 & -4 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & k & | & 1 \\ 0 & -4 & 1-k & | & 1 \\ 0 & k-6 & 4-k & | & k+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 4III + (k-6)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & k & | & 1 \\ 0 & -4 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+3k+10 & | & 5k+10 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi
   – Se $k \neq -2, 5$, la matrice $M(T)$ ha rango 3 e
   $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (1,1,3),\ (6,k,6),\ (k,4,3)\ \} \qquad \ker(T) = \{0\}$$
   – Se $k = -2$, la matrice $M(T)$ ha rango 2 e
   $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (1,1,3),\ (6,-2,6)\ \}$$
   Per trovare il nucleo di T dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M(T)$:
   $$\begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ -4y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}t \\ y = \frac{3}{4}t \\ z = t \end{cases} \qquad \mathcal{B}\left(\ker(T)\right) = \{(-10, 3, 4)\}$$
   – Se $k = 5$, la matrice $M(T)$ ha rango 2 e
   $$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (1,1,3),\ (6,5,6)\ \}$$
   Per trovare il nucleo di T dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M(T)$:
   $$\begin{cases} x + 6y + 5z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \mathcal{B}\left(\ker(T)\right) = \{(1, -1, 1)\}$$

b) T è invertibile se $M(T)$ ha determinante diverso da zero, ovvero rango massimo. Quindi T è invertibile se $k \neq -2, 5$.

c) Consideriamo il sistema $M(T)|v$. Dalla matrice ridotta vediamo che
   – Se $k \neq -2, 5$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 4$ quindi il sistema ha soluzione.
   – Se $k = -2$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 3$ quindi il sistema ha soluzione.
   – Se $k = 5$, $\mathrm{rg}(M) = 3 < \mathrm{rg}(M|v) = 4$ quindi il sistema non ha soluzione.

   Infine v appartiene all'immagine di T se $k \neq 5$.

□

Esercizio 5. *Sia $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (-1,2,-1)\ \}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare equazioni paramtriche o cartesiane degli autospazi di S.*
b) *Trovare per quali k reali la matrice A è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE:

a) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda)$, quindi A ha come autovalori $\lambda = 0$, doppio, e $\lambda = 4$. Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(4) = \ker(A - 4I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -4 & k & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -4y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{k}{4}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad E(0) = \langle (4, k, 4)_\mathcal{B} \rangle$$

Notiamo che la matrice A è associata a S rispetto alla base $\mathcal{B}$, quindi dobbiamo trasformare il vettore ottenuto per esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$(4, k, 4)_\mathcal{B} = 4(1, 2, 1) + k(1, 0, -1) + 4(1, -1, 1) = (k, 12, k)$$

Quindi $E(4) = \langle (k, 12, k) \rangle$, ed equazioni parametriche e cartesiane della retta $E(4)$ sono

$$E(4) : \begin{cases} x = kt \\ y = 12t \\ z = kt \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{e} \qquad E(4) : \begin{cases} x - z = 0 \\ 12x - ky = 0 \end{cases}$$

Analogamente

$$E(0) = \ker(A) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ kz = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi

– Se $k \neq 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(0) = \langle (0, 1, 0)_\mathcal{B} \rangle$$

Passando alla base canonica, $(0, 1, 0)_\mathcal{B} = (1, 0, -1)$, quindi $E(0) = \langle (1, 0, -1) \rangle$, ed equazioni parametriche e cartesiane della retta $E(0)$ sono

$$E(0) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{e} \qquad E(0) : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

– Se $k = 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(0) = \langle (0, 1, 0)_\mathcal{B},\ (1, 0, -1)_\mathcal{B} \rangle$$

Passando alla base canonica, $(0, 1, 0)_\mathcal{B} = (1, 0, -1)$, e $(1, 0, -1)_\mathcal{B} = (2, , -1, 2)$, quindi $E(0) = \langle (1, 0, -1),\ (2, , -1, 2) \rangle$, ed equazioni parametriche e cartesiane del piano $E(2)$ sono

$$E(0) : \begin{cases} x = t + 2s \\ y = -s \\ z = -t + 2s \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{e} \qquad E(0) :\ x + 4y + z = 0$$

b) Dai conti eseguiti al punto precedente ricaviamo che S è diagonalizzabile se $k = 0$ quando $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

□

Esercizio 6. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da*

$$W = \left\{ x \in \mathbf{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

a) *Si trovi una base ortonormale di W.*
b) *Si trovi una base dell'insieme $W^\perp$ dei vettori ortogonali a tutti gli elementi di W.*

SOLUZIONE:

a) Cominciamo con il determinare una base di W

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t - s \\ x_2 = s \\ x_3 = -2t - 2s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Quindi una base di W è data da

$$\mathcal{B}(W) = \{v_1 = (-1, 1, -2, 0),\ v_2 = (-2, 0, -2, 1)\}$$

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$. Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$w_1 = v_1 = (-1, 1, -2, 0)$

$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (-2, 0, -2, 1) - \dfrac{6}{6} \cdot (-1, 1, -2, 0) = (-1, -1, 0, 1)$

A questo punto per ottenere la base ortonormale cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1, 1, -2, 0)}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$
$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Infine

$$\mathcal{B}'(W) = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$

b) Per verificare se un vettore di $\mathbf{R}^4$ è ortogonale a tutti gli elementi di W basta controllare che sia ortogonale agli elementi di una base di W. Quindi

$$W^\perp = \left\{ v \in \mathbf{R}^4 \mid (v, v_1) = (v, v_2) = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid -2x_1 - 2x_3 + x_4 = -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo otteniamo:

$$W^\perp : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t + 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t + 2s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(W^\perp) = \{(1, 1, 0, 2),\ (0, 2, 1, 2)\}$$

□