CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

APPELLO DEL 25/06/2009, FILA A – GEOMETRIA –

Esercizio 1. *Si considerino la retta* $r:\ x-2y=y-z-1=0$ *e la famiglia di piani* $\pi_k:\ 4x+2y+kz=2$, *dove* k *è un parametro reale.*

a) *Determinare per quali valori di* k *il piano* π_k *è parallelo alla retta* r, *e per quali valori di* k *il piano* π_k *è ortogonale alla retta* r.

b) *Fissato* $k=0$, *si consideri il piano* π_0. *Determinare un'equazione cartesiana del piano passante per l'origine, ortogonale a* π_0 *e al piano* $x+y+z=0$.

SOLUZIONE:

a) La retta r ha equazione parametrica

$$r:\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases} \qquad \forall\ t\ \in\ \mathbf{R}$$

quindi ha direzione $v=(2,1,1)$. Il piano $\pi_k:\ 4x+2y+kz=2$ è ortogonale a $w=(4,2,k)$. Di conseguenza

- r e π_k sono paralleli se v e w sono ortogonali, quindi se $8+2+k=0$, cioè $k=-10$.
- r e π_k sono ortogonlai se v e w sono paralleli, cioè proporzionali. Di consequenza deve essere $2\cdot(2,1,1)=(4,2,k)$, cioè $k=2$.

b) Consideriamo il piano $\pi_0:\ 2x+y=1$. Notiamo che $x+y+z=0$ e π_0 non sono tra loro paralleli, quindi la loro intersezione è una retta s:

$$s:\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases} \qquad \forall t\in\mathbf{R}$$

Un piano ortogonale a π_0 e al piano $x+y+z=0$ è anche ortogonale a s. Si tratta quindi di determinare il piano ortogonale a s passante per l'origine. Poiché s ha direzione $(1,-2,1)$, otteniamo il piano $x-2y+z=0$.

□

Esercizio 2. *Si considerino gli insiemi*

$$S_k=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbf{R}^4 \mid 2x+y-z+w=k+1,\quad x+3y-z-w=0\right\},$$

dove k *è un parametro reale.*

a) *Stabilire per quali valori di* k *l'insieme* S_k *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}^4$.

b) *Per i valori di* k *trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di* S_k.

c) *Stabilire per quali valori di* k *il vettore* $v=(3,1,6,0)$ *appartiene a* S_k.

SOLUZIONE:

a) L'insieme S_k è uno spazio vettoriale se è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi se $k=-1$.

b) Posto $k=-1$ riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 2II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2t-2s \\ y=t \\ z=5t-3s \\ w=s \end{cases} \qquad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

Una base di S_{-1} è data da

$$\mathcal{B}=\{\ (2,1,5,0),\ (-2,0,-3,1)\ \}$$

c) $v=(3,1,6,0)$ appartiene a S_k se

$$2\cdot 3+1-6=k+1 \quad\Rightarrow\quad k=0$$
$$3+3\cdot 1-6=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0$$

Quindi $v\in S_k$ se $k=0$.

$\square$

Esercizio 3. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & k+1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ k+3 & 2k+2 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione e una base del sottospazio $V = \langle A, B, C, D \rangle$ dello spazio $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$, al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

b) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$ si stabilisca se $E \in V$. In caso affermativo, si scriva la rappresentazione di E come combinazine lineare della base di V.*

Soluzione:

Per determinare la dimensione e una base di V bisogna stabilire quante e quali tra le matrici A, B, C e D sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA + yB + zC + wD = 0$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z + w = 0 \\ 2x + 5z = 0 \\ -x + y - 2z + (k+1)w = 0 \end{cases}$$

Per eprimere E come combinazione lineare di A, B, C e D dobbiamo risolvere l'equazione $xA+yB+zC+wD = E$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 2z + w = 4 \\ 2x + 5z = k+3 \\ -x + y - 2z + (k+1)w = 2k+2 \end{cases}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata al secondo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & | & k+3 \\ -1 & 1 & -2 & k+1 & | & 2k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & k+1 & | & 2k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & k & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice dei coefficienti.
   - Se $k \neq 0$ la matrice ha rango 4, quindi A, B, C e D sono linearmente indipendenti e una base di V è $\{A, B, C, D\}$, $\dim(V) = 4$.
   - Se $k = 0$ la matrice ha rango 3 e A, B e C sono linearmente indipendenti. Una base di V è $\{A, B, C\}$, $\dim(V) = 3$.

b) Per esprimere E come combinazione lineare della base trovata, consideriamo la matrice completa, distinguendo due casi:
   - Se $k \neq 0$ sia la matrice dei coefficienti che quella completa hanno rango 4, quindi il sistema ha soluzione:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + w = 3 \\ z = k+1 \\ kw = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2k - 1 \\ y = 1 \\ z = k+1 \\ w = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad E = (-1-2k)A + B + (k+1)C + 2D$$

   - Se $k = 0$, in base alla base scelta al punto precedente, dobbiamo risolvere il sistema $xA + yB + zC = E$. Consideriamo quindi solo le prime tre colonne della matrice dei coefficienti: sia la matrice dei coefficienti che quella completa hanno rango 3, quindi il sistema ha soluzione.

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad E = -A + 3B + C$$

$\square$

Esercizio 4. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3,\ 4x_1 + kx_2 + 6x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + kx_3)$$

a) *Determinare il nucleo e l'immagine di T al variare del parametro reale k.*
b) *Stabilire per quali valori di k la funzione T è invertibile.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (0, k, 5)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:
Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & k & 6 \\ 2 & 4 & k \end{bmatrix}$$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla calonna data dal vettore v:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & k & 6 & | & k \\ 2 & 4 & k & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & k-2 & 4 & | & k \\ 0 & 3 & k-1 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & k-1 & | & 5 \\ 0 & k-2 & 4 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - (k-2)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & k-1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -k^2 + 3k + 10 & | & -2k + 10 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi
   – Se $k \neq -2, 5$, la matrice $M(T)$ ha rango 3 e

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,4,2),\ (1,k,4),\ (1,6,k)\ \} \qquad \ker(T) = \{0\}$$

   – Se $k = -2$, la matrice $M(T)$ ha rango 2 e

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,4,2),\ (1,-2,4)\ \}$$

   Per trovare il nucleo di T dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \mathcal{B}(\ker(T)) = \{(-1,1,1)\}$$

   – Se $k = 5$, la matrice $M(T)$ ha rango 2 e

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,4,2),\ (1,5,4)\ \}$$

   Per trovare il nucleo di T dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6}t \\ y = -\frac{4}{3}t \\ z = t \end{cases} \qquad \mathcal{B}(\ker(T)) = \{(1,-8,6)\}$$

b) T è invertibile se $M(T)$ ha determinante diverso da zero, ovvero rango massimo. Quindi T è invertibile se $k \neq -2, 5$.
c) Consideriamo il sistema $M(T)|v$. Dalla matrice ridotta vediamo che
   – Se $k \neq -2, 5$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 4$ quindi il sistema ha soluzione.
   – Se $k = 5$, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|v) = 3$ quindi il sistema ha soluzione.
   – Se $k = -2$, $\mathrm{rg}(M) = 3 < \mathrm{rg}(M|v) = 4$ quindi il sistema non ha soluzione.
   Infine v appartiene all'immagine di T se $k \neq -2$.

$\square$

Esercizio 5. *Sia $\mathcal{B} = \{(1,2,1),\ (1,0,-1),\ (1,-1,1)\ \}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare equazioni paramtriche o cartesiane degli autospazi di S.*
b) *Trovare per quali k reali la matrice A è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi A ha come autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 0$. Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(0) = \ker(A): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ kx + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = \frac{k}{2}t \end{cases} \Rightarrow \quad E(0) = \langle (-2, 2, k)_{\mathcal{B}} \rangle$$

Notiamo che la matrice A è associata a S rispetto alla base $\mathcal{B}$, quindi dobbiamo trasformare il vettore ottenuto per esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$(-2, 2, k)_{\mathcal{B}} = -2(1, 2, 1) + 2(1, 0, -1) + k(1, -1, 1) = (k, -k-4, k-4)$$

Quindi $E(0) = \langle (k, -k-4, k-4) \rangle$, ed equazioni parametriche e cartesiane della retta $E(0)$ sono

$$E(0): \begin{cases} x = kt \\ y = (-k-4)t \\ z = (k-4)t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{e} \qquad E(0): \begin{cases} 8x + ky + kz = 0 \\ (k-4)y + (k+4)z = 0 \end{cases}$$

Analogamente

$$E(2) = \ker(A - 2I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ kx = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi

– Se $k \neq 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad E(2) = \langle (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \rangle$$

Passando alla base canonica, $(0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (1, -1, 1)$, quindi $E(2) = \langle (1, -1, 1) \rangle$, ed equazioni parametriche e cartesiane della retta $E(2)$ sono

$$E(2): \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{e} \qquad E(2): \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

– Se $k = 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \quad E(2) = \langle (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \ (1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \rangle$$

Passando alla base canonica, $(0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (1, -1, 1)$, e $(1, 1, 0)_{\mathcal{B}} = (2, 2, 0)$, quindi $E(2) = \langle (1, -1, 1), \ (2, 2, 0) \rangle$, ed equazioni parametriche e cartesiane del piano $E(2)$ sono

$$E(2): \begin{cases} x = t + 2s \\ y = -t + 2s \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \text{e} \qquad E(2): \ x - y - 2z = 0$$

b) Dai conti eseguiti al punto precedente ricaviamo che S è diagonalizzabile se $k = 0$ quando $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

□

Esercizio 6. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da*

$$W = \left\{ x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

a) *Si trovi una base ortonormale di W.*

b) *Si trovi una base dell'insieme $W^\perp$ dei vettori ortogonali a tutti gli elementi di W.*

Soluzione:

a) Cominciamo con il determinare una base di W

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = t \\ x_3 = 2t \\ x_4 = s \end{cases}$$

Quindi una base di W è data da

$$\mathcal{B}(W) = \{v_1 = (-1, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 1, 2, 0)\}$$

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$. Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$w_1 = v_1 = (-1, 0, 0, 1)$$

$$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (2, 1, 2, 0) - \frac{-2}{2} \cdot (-1, 0, 0, 1) = (1, 1, 2, 1)$$

A questo punto per ottenere la base ortonormale cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1, 0, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 2, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

Infine

$$\mathcal{B}'(W) = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$$

b) Per verificare se un vettore di $\mathbf{R}^4$ è ortogonale a tutti gli elementi di W basta controllare che sia ortogonale agli elementi di una base di W. Quindi

$$W^\perp = \left\{v \in \mathbf{R}^4 \mid (v, v_1) = (v, v_2) = 0\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid -x_1 + x_4 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\right\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo otteniamo:

$$W^\perp : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t - 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(W^\perp) = \{(1, -2, 0, 1),\ (0, -2, 1, 0)\}$$

$\square$