CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 11 – GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 11.1. *[13.14]* Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare autovalori e autovettori di A.
b) Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.
c) Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A

Esercizio 11.2. *[8.16]* Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$

$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.
b) Si determini l'inversa T^{-1}.

Esercizio 11.3. *[8.51]* Dati i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 2, 2), \quad v_3 = (1, 1, 0),$$

si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$T(v_1) = (2, 0, 0), \quad T(v_2) = (4, 4, 4), \quad T(v_3) = (0, 6, 6)$$

a) Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.
b) Si determini una base del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 11.4. *[11.9]* Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in $\mathbf{R}$.
b) Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 11.5. *[12.24]* Siano $M = (1, 1, 1)$, $N = (3, 2, 1)$, $L = (1, 2, 2)$ punti dello spazio $\mathbf{R}^3$. Sia $C = (-1, 0, 1)$.

a) Si calcoli l'area del triangolo MNL.
b) Si determini l'insieme $M'N'L'$ che si ottiene proiettando il triangolo MNL dal centro C sul piano $x + y = 0$.
c) Si calcoli l'area del triangolo $M'N'L'$.

Esercizio 11.6. *[13.16]* Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$\mathcal{C} :\ 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) Stabilire il tipo di conica.
b) Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.
c) (Facoltativo) Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.

Esercizio 11.7. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definita da*

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ kx_1 + 3x_2 - 3x_3)$$

a) *Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di T al variare di k.*
b) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettivae/o suriettiva.*
c) *Esistono valori di k per i quali il vettore $v(1, 1, 0, 0)$ appartiene all'immagine di T?*

Esercizio 11.8. *[9.27]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire se 4 è autovalore di A. Calcolare gli autovalori e autovettori di A.
b) La matrice A è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.
c) Sia C la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A e C siano simili?

Esercizio 11.9. *[11.15]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, rispetto agli autovalori $1, 1, 2$.

a) Calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.
b) T è invertibile?
c) T è un endomorfismo simmetrico?

Esercizio 11.10. *[10.19]* Siano $v_1 = (2, 1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 1, 2, 0)$ e sia $V = \langle v_1,\ v_2 \rangle \subset \mathbf{R}^4$.

a) Calcolare l'angolo tra v_1 e v_2.
b) Trovare una base del complemento ortogonale di V.