CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 10 – GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 10.1. *[11.1]* [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato.] Calcolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 10.2. *[11.2]* Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale $P^T AP$ sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 10.3. *[11.7]* Si consideri la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.
b) Determinare una matrice ortogonale P tale che $P^T AP$ sia diagonale.

Esercizio 10.4. *[11.10]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}$. T è un endomorfismo simmetrico?

Esercizio 10.5. *[11.11]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}.$$

a) T è un endomorfismo simmetrico?
b) T è diagonalizzabile?

Esercizio 10.6. *[11.15]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, rispetto agli autovalori $1, 1, 2$.

a) Calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.
b) T è invertibile?
c) T è un endomorfismo simmetrico?

Esercizio 10.7. *[11.13]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) Stabilire se T è invertibile.
b) Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.
c) Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza T.

Esercizio 10.8. *[13.4]* Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x,y) = 0$:

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$

(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:
a) Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.
b) Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.
c) Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.

Esercizio 10.9. *[13.5]* Riconoscere che le seguenti coniche $f(x, y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

(2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

(3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 10.10. *[13.6]* Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Esercizio 10.11. *[13.7]* Ridurre in forma canonica le coniche dell'esercizio precedente e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra.

Esercizio 10.12. *[13.8]* Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$\mathcal{C} \ : \ 2xy - x - 3y = k$$

(1) Stabilire per quali valori di k la conica $\mathcal{C}$ è degenere.
(2) Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.
(3) Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.

Esercizio 10.13. *[13.9]* Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione

$$\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) Esistono coniche degeneri nella famiglia?
b) Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di k.
c) Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).

Esercizio 10.14. *[13.11]* Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.
b) Trovare le coniche degeneri della famiglia.
c) Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.

Esercizio 10.15. *[13.13]* Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}_t \ : \ tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.
b) Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.
c) Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.