CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA 2008/09

Esercizio 7.1. *[9.3]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.
b) Stabilire se T è diagonalizzabile.
c) Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).

Esercizio 7.2. *[9.5]* [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Riconoscere che le due seguenti matrici M sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice P diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con D matrice diagonale; ricordiamo che P è una matrice le cui colonne sono autovettori di M).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.3. *[9.7]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.
b) Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.
c) Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.

Esercizio 7.4. *[9.9]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.
b) Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.

Esercizio 7.5. *[9.12]* Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di T.
b) Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice P diagonalizzante.
c) Si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.

Esercizio 7.6. *[9.13]* [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.7. *[9.16]* Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ 1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ \}$$

a) Si determinino gli autovalori di T.
b) Si determinino gli autovettori e gli autospazi di T.
c) Si stabilisca se T è diagonalizzabile.

Esercizio 7.8. *[9.17]* Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Trovare gli autovalori (reali) di S.
b) Trovare gli autovettori di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

Esercizio 7.9. *[9.22]* Data la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.
b) Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di M.

Esercizio 7.10. *[9.23]* Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.
b) Stabilire per quali valori di k le due matrici A e B sono simili.

Esercizio 7.11. *[9.26]* Siano A e B le matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Dire per quali valori del parametro reale k la matrice B è diagonalizzabile.
b) Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?

Esercizio 7.12. *[9.32]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.
b) Calcolare gli autovalori di T.